HÀ HUY KHOÁI (Tổng Chủ biên)
CUNG THẾ ANH – TRẦN VĂN TẤN – ĐẶNG HÙNG THẮNG (đồng Chủ biên)
TRẦN MẠNH CƯỜNG – LÊ VĂN CƯỜNG – NGUYỄN ĐẠT ĐĂNG – LÊ VĂN HIỆN
PHAN THANH HỒNG – TRẦN ĐÌNH KẾ – PHẠM ANH MINH – NGUYỄN THỊ KIM SƠN

TOÁN

11

TẬP MỘT

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM BẢN MẪU Tháng 11 - 2022

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH

1. Mỗi bài học đều được thiết kế theo cấu trúc gồm những phần sau đây.

   Thuật ngữ: Điểm tên các đối tượng chính của bài học.

   Kiến thức, kĩ năng: Giúp em xác định những nội dung kiến thức, kĩ năng chính cần lĩnh hội và rèn luyện trong bài học.

   Mở đầu: Đưa ra tình huống làm nảy sinh nhu cầu học tập; nó có thể là một bài toán thực tế đại diện, hay là một đoạn dẫn nhập. Em không cần trả lời ngay các câu hỏi hay yêu cầu được đặt ra ở phần này, mà sẽ giải quyết chúng trong bài học, sau khi đã lĩnh hội được lượng tri thức và kĩ năng cần thiết.

   Mục kiến thức: Sau phần mở đầu, bài học được chia thành các mục theo từng chủ đề. Nhìn chung, mỗi đơn vị kiến thức có cấu trúc sau đây:

   > **Hình thành kiến thức:** Em cần tích cực tham gia vào các hoạt động (**HĐ**) để chiếm lĩnh tri thức. Các **HĐ** này cho em cơ hội quan sát và trải nghiệm, tính toán và lập luận để đi tới khung kiến thức một cách tự nhiên.
   >
   > **Ví dụ:** Em có thể học ở đây phương pháp, cách lập luận và tính toán, cách trình bày lời giải bài toán.
   >
   > **Luyện tập:** Vận dụng kiến thức đã học, tham khảo ví dụ tương ứng, em hãy luyện tập để củng cố kiến thức và rèn luyện kĩ năng.
   >
   > **Vận dụng:** Trên nền tảng kiến thức và kĩ năng đã được học, em giải quyết các bài toán gắn với thực tế, kết nối tri thức với các lĩnh vực khác nhau trong học tập, khoa học và cuộc sống.

   Em có thể bắt gặp một khung chữ nhằm hỗ trợ hoặc bình luận,... cho nội dung tương ứng được đề cập ở bên cạnh.

   Ngoài bốn thành phần cơ bản ở trên, trong một đơn vị kiến thức, em còn có thể có cơ hội tham gia vào *Khám phá*, *Trải nghiệm*, *Thảo luận*, trả lời ?, mở rộng hiểu biết cùng *Em có biết?*,...

   Bài tập: Em chủ động thực hiện ngoài giờ trên lớp, tuy vậy, thầy/cô sẽ dành thời lượng nhất định để cùng em điểm qua các bài tập này.

2. Các bảng tra cứu và giải thích thuật ngữ (được đặt ở cuối sách) cung cấp địa chỉ tra cứu và giải thích một số khái niệm, công thức được phát biểu trong sách.

Hãy bảo quản, giữ gìn sách giáo khoa
để dành tặng các em học sinh lớp sau!

LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh yêu quý!

Trên tay các em là cuốn *TOÁN 11* của bộ sách "Kết nối tri thức với cuộc sống". Đúng như tên gọi của bộ sách, các kiến thức trình bày ở đây chủ yếu xuất phát từ những tình huống của cuộc sống quanh ta và trở lại giúp ta giải quyết những vấn đề của cuộc sống. Vì thế, khi học Toán theo cuốn sách này, các em sẽ cảm nhận được rằng, Toán học thật là gần gũi.

Đoạn mở đầu của các chương, các bài học thường đưa ra những tình huống, những ví dụ thực tế cho thấy sự cần thiết phải đưa đến những khái niệm toán học mới. Qua đó, các em sẽ được trau dồi những kĩ năng cần thiết cho một công dân trong thời hiện đại, đó là khả năng "mô hình hoá". Khi đã đưa vấn đề thực tiễn về bài toán (mô hình toán học), chúng ta sẽ phát hiện thêm những kiến thức toán học mới, để cùng với những kiến thức đã biết giải quyết bài toán thực tiễn đặt ra.

Hi vọng rằng, qua mỗi bài học, mỗi chương sách, qua mỗi vòng lặp từ thực tiễn đến tri thức toán học, rồi từ tri thức toán học quay về thực tiễn, *TOÁN 11* sẽ giúp các em trưởng thành nhanh chóng và trở thành người bạn thân thiết của các em.

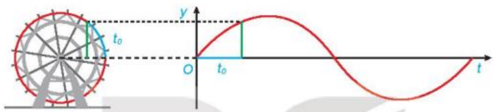
Chúc các em thành công cùng *TOÁN 11*!

MỤC LỤC

CHƯƠNG I

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Chương này giới thiệu khái niệm góc lượng giác, giá trị lượng giác của góc lượng giác, các công thức lượng giác cơ bản, hàm số lượng giác, cách giải phương trình lượng giác cơ bản và một số ứng dụng của lượng giác trong thực tiễn.



Bài 1 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

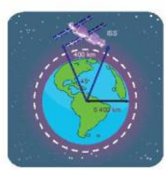
THUẬT NGỮ

- Góc lượng giác
- Số đo của góc lượng giác
- Đường tròn lượng giác
- Giá trị lượng giác của góc lượng giác
- Hệ thức cơ bản giữa các giá trị lượng giác

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết các khái niệm cơ bản về góc lượng giác.
- Nhận biết khái niệm giá trị lượng giác của một góc lượng giác.
- Mô tả bảng giá trị lượng giác của một số góc lượng giác thường gặp; hệ thức cơ bản giữa các giá trị lượng giác của một góc lượng giác; quan hệ giữa các giá trị lượng giác của các góc lượng giác có liên quan đặc biệt: bù nhau, phụ nhau, đối nhau, hơn kém nhau π.
- Sử dụng máy tính cầm tay để tính giá trị lượng giác của một góc lượng giác khi biết số đo của góc đó.
- Giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với giá trị lượng giác của góc lượng giác.

Trạm vũ trụ Quốc tế ISS (tên Tiếng Anh: International Space Station) nằm trong quỹ đạo tròn cách bề mặt Trái Đất khoảng 400 km (H.1.1). Nếu trạm mặt đất theo dõi được trạm vũ trụ ISS khi nó nằm trong góc 45° ở tâm của quỹ đạo tròn này phía trên ăng-ten theo dõi, thì trạm vũ trụ ISS đã di chuyển được bao nhiêu kilômét trong khi nó đang được trạm mặt đất theo dõi? Giả sử rằng bán kính của Trái Đất là 6 400 km. Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.



Hình 1.1

1. GÓC LƯỢNG GIÁC

a) Khái niệm góc lượng giác và số đo của góc lượng giác

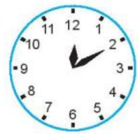
HĐ1. Nhận biết khái niệm góc lượng giác

Trên đồng hồ ở Hình 1.2, kim phút đang chỉ đúng số 2.

a) Phải quay kim phút mấy phần của một vòng tròn theo chiều quay ngược chiều kim đồng hồ để nó chỉ đúng số 12?

b) Phải quay kim phút mấy phần của một vòng tròn theo chiều quay của kim đồng hồ để nó chỉ đúng số 12?

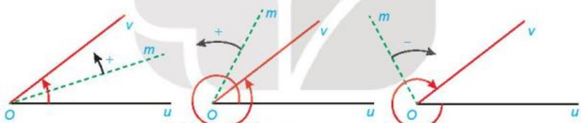
c) Có bao nhiêu cách quay kim phút theo một chiều xác định để kim phút từ vị trí chỉ đúng số 2 về vị trí chỉ đúng số 12?



Hình 1.2

Trong mặt phẳng, cho hai tia *Ou*, *Ov*. Xét tia *Om* cùng nằm trong mặt phẳng này. Nếu tia *Om* quay quanh điểm *O*, theo một chiều nhất định từ *Ou* đến *Ov*, thì ta nói nó quét một góc lượng giác với tia đầu *Ou*, tia cuối *Ov* và kí hiệu là (Ou, Ov).

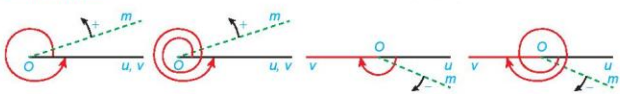
Góc lượng giác (Ou, Ov) chỉ được xác định khi ta biết được chuyển động quay của tia *Om* từ tia đầu *Ou* đến tia cuối *Ov* (H.1.3). Ta quy ước: Chiều quay ngược với chiều quay của kim đồng hồ là *chiều dương*, chiều quay cùng chiều kim đồng hồ là *chiều âm*.



Hình 1.3

Khi đó, nếu tia *Om* quay theo chiều dương đúng một vòng ta nói tia *Om* quay góc 360°, quay đúng 2 vòng ta nói nó quay góc 720°; quay theo chiều âm nửa vòng ta nói nó quay góc -180°, quay theo chiều âm 1,5 vòng ta nói nó quay góc $-1{,}5 \cdot 360^\circ = -540^\circ$, ...

Khi tia *Om* quay góc α° thì ta nói góc lượng giác mà tia đó quét nên có số đo α°. Số đo của góc lượng giác có tia đầu *Ou*, tia cuối *Ov* được kí hiệu là sđ(Ou, Ov).

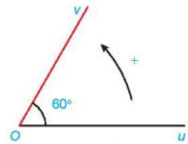


sđ$(Ou, Ov) = 360^\circ$ sđ$(Ou, Ov) = 720^\circ$ sđ$(Ou, Ov) = -180^\circ$ sđ$(Ou, Ov) = -540^\circ$

Mỗi góc lượng giác gốc *O* được xác định bởi tia đầu *Ou*, tia cuối *Ov* và số đo của nó.

Chú ý. Cho hai tia *Ou*, *Ov* thì có vô số góc lượng giác tia đầu *Ou*, tia cuối *Ov*. Mỗi góc lượng giác như thế đều kí hiệu là (Ou, Ov). Số đo của các góc lượng giác này sai khác nhau một bội nguyên của 360°.

Ví dụ 1. Cho góc hình học uOv có số đo 60° (H.1.4). Xác định số đo của các góc lượng giác (Ou, Ov) và (Ov, Ou).



Hình 1.4

Giải

Ta có:

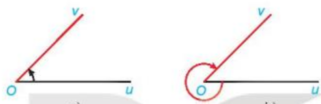
– Các góc lượng giác tia đầu Ou, tia cuối Ov có số đo là

$sđ\,(Ou, Ov) = 60^\circ + k360^\circ\ (k \in \mathbb{Z})$.

– Các góc lượng giác tia đầu Ov, tia cuối Ou có số đo là

$sđ\,(Ov, Ou) = -60^\circ + k360^\circ\ (k \in \mathbb{Z})$.

Luyện tập 1. Cho góc hình học $uOv = 45^\circ$. Xác định số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) trong mỗi trường hợp sau:

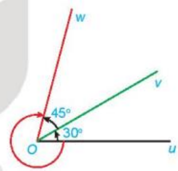


a) b)

b) Hệ thức Chasles

HĐ2. Nhận biết hệ thức Chasles

Cho ba tia Ou, Ov, Ow với số đo của các góc hình học uOv và vOw lần lượt là 30° và 45°.



Hình 1.5

a) Xác định số đo của ba góc lượng giác (Ou, Ov), (Ov, Ow) và (Ou, Ow) được chỉ ra ở Hình 1.5.

b) Với các góc lượng giác ở câu a, chứng tỏ rằng có một số nguyên k để $sđ\,(Ou, Ov) + sđ\,(Ov, Ow) = sđ\,(Ou, Ow) + k360^\circ$.

Hệ thức Chasles: Với ba tia Ou, Ov, Ow bất kì, ta có

$sđ\,(Ou, Ov) + sđ\,(Ov, Ow) = sđ\,(Ou, Ow) + k360^\circ\ (k \in \mathbb{Z})$.

Nhận xét. Từ hệ thức Chasles, ta suy ra:

Với ba tia tuỳ ý Ox, Ou, Ov ta có

$$sđ\,(Ou,\ Ov) = sđ\,(Ox,\ Ov) - sđ\,(Ox,\ Ou) + k360^\circ\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Hệ thức này đóng vai trò quan trọng trong việc tính toán số đo của góc lượng giác.

Hệ thức này tương tự công thức $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$.

Ví dụ 2. Cho một góc lượng giác $(Ox,\ Ou)$ có số đo -270° và một góc lượng giác $(Ox,\ Ov)$ có số đo 135°. Tính số đo của các góc lượng giác $(Ou,\ Ov)$.

Giải

Số đo của các góc lượng giác tia đầu *Ou*, tia cuối *Ov* là

$sđ(Ou, Ov) = sđ(Ox, Ov) - sđ(Ox, Ou) + k360^\circ$

$= 135^\circ - (-270^\circ) + k360^\circ = 405^\circ + k360^\circ$

$= 45^\circ + (k+1)360^\circ = 45^\circ + m360^\circ$ $(m = k + 1, m \in \mathbb{Z})$.

Vậy các góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $45^\circ + m360^\circ$ $(m \in \mathbb{Z})$.

Luyện tập 2. Cho một góc lượng giác (Ox, Ou) có số đo 240° và một góc lượng giác (Ox, Ov) có số đo -270°. Tính số đo của các góc lượng giác (Ou, Ov).

2. ĐƠN VỊ ĐO GÓC VÀ ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

a) Đơn vị đo góc và cung tròn

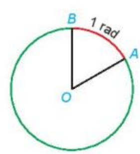
Đơn vị độ: Để đo góc, ta dùng đơn vị độ. Ta đã biết: Góc 1° bằng $\frac{1}{180}$ góc bẹt.

Đơn vị độ được chia thành những đơn vị nhỏ hơn: $1^\circ = 60'$; $1' = 60''$.

Đối với các góc lượng giác, khi mà số vòng quay trong chuyển động tương ứng từ tia đầu đến tia cuối là khá lớn thì số đo của chúng tính bằng độ sẽ trở nên cồng kềnh. Do đó, trong khoa học và kĩ thuật, bên cạnh việc đo bằng độ, người ta còn sử dụng đơn vị đo góc bằng rađian.

Đơn vị rađian: Cho đường tròn (O) tâm O, bán kính R và một cung AB trên (O) (H.1.6).

Ta nói cung tròn AB có số đo bằng 1 rađian nếu độ dài của nó đúng bằng bán kính R.
Khi đó ta cũng nói rằng góc AOB có số đo bằng 1 rađian và viết: $\widehat{AOB} = 1$ rad.



Hình 1.6

Quan hệ giữa độ và rađian: Do đường tròn có độ dài là $2\pi R$ nên nó có số đo 2π rad. Mặt khác, đường tròn có số đo bằng 360° nên ta có $360^\circ = 2\pi$ rad.

Do đó ta viết:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \quad \text{và} \quad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ.$$

Chú ý. Khi viết số đo của một góc theo đơn vị rađian, người ta thường không viết chữ rad sau số đo. Chẳng hạn góc $\frac{\pi}{2}$ được hiểu là góc $\frac{\pi}{2}$ rad.

Ví dụ 3

a) Đổi từ độ sang rađian các số đo sau: 45°; 150°.

b) Đổi từ rađian sang độ các số đo sau: $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{4}$.

Giải

a) Ta có:

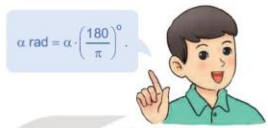
$$45^\circ = 45\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4};$$

$$150^\circ = 150\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}.$$

b) Ta có:

$$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 60^\circ;$$

$$\frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}\cdot\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 225^\circ.$$



Luyện tập 3

a) Đổi từ độ sang rađian các số đo sau: 360°; -450°;

b) Đổi từ rađian sang độ các số đo sau: 3π; $-\frac{11\pi}{5}$.

Chú ý. Dưới đây là bảng tương ứng giữa số đo bằng độ và số đo bằng rađian của các góc đặc biệt trong phạm vi từ 0° đến 180°.

Độ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Rađian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

b) Độ dài cung tròn

HĐ3. Xây dựng công thức tính độ dài của cung tròn

Cho đường tròn bán kính R.

a) Độ dài của cung tròn có số đo bằng 1 rad là bao nhiêu?

b) Tính độ dài l của cung tròn có số đo α rad.

> Một cung của đường tròn bán kính R và có số đo α rad thì có độ dài $l = R\alpha$.

Ví dụ 4. Giải bài toán ở *tình huống mở đầu*.

Giải

Bán kính quỹ đạo của trạm vũ trụ quốc tế là $R = 6\,400 + 400 = 6\,800$ (km).

Đổi $45^\circ = 45\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$ rad.

Vậy trong khi được trạm mặt đất theo dõi, trạm ISS đã di chuyển một quãng đường có độ dài là $l = R\alpha = 6800 \cdot \frac{\pi}{4} \approx 5340{,}708 \approx 5341$ (km).

Vận dụng 1. Một máy kéo nông nghiệp với bánh xe sau có đường kính là 184 cm, bánh xe trước có đường kính là 92 cm, xe chuyển động với vận tốc không đổi trên một đoạn đường thẳng. Biết rằng vận tốc của bánh xe sau trong chuyển động này là 80 vòng/phút.

a) Tính quãng đường đi được của máy kéo trong 10 phút.

b) Tính vận tốc của máy kéo (theo đơn vị km/giờ).

c) Tính vận tốc của bánh xe trước (theo đơn vị vòng/phút).

3. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

a) Đường tròn lượng giác

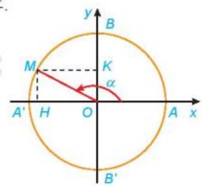
HĐ4. Nhận biết khái niệm đường tròn lượng giác

Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, vẽ đường tròn tâm *O* bán kính $R = 1$. Chọn điểm gốc của đường tròn là giao điểm $A(1; 0)$ của đường tròn với trục *Ox*. Ta quy ước chiều dương của đường tròn là chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ và chiều âm là chiều quay của kim đồng hồ.

a) Xác định điểm *M* trên đường tròn sao cho $sđ(OA, OM) = \frac{5\pi}{4}$.

b) Xác định điểm N trên đường tròn sao cho $sđ(OA, ON) = -\frac{7\pi}{4}$.

- Đường tròn lượng giác là đường tròn có tâm tại gốc toạ độ, bán kính bằng 1, được định hướng và lấy điểm $A(1; 0)$ làm điểm gốc của đường tròn.
- Điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo α (độ hoặc radian) là điểm *M* trên đường tròn lượng giác sao cho sđ $(OA, OM) = \alpha$.



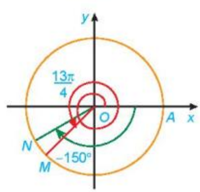
Hình 1.7

Ví dụ 5. Xác định các điểm *M* và *N* trên đường tròn lượng giác lần lượt biểu diễn các góc lượng giác có số đo bằng $\frac{13\pi}{4}$ và -150°.

Giải

Điểm *M* trên đường đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng $\frac{13\pi}{4}$ được xác định trong Hình 1.8.

Điểm *N* trên đường đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng -150° được xác định trong Hình 1.8.

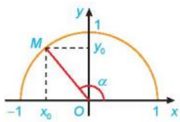


Hình 1.8

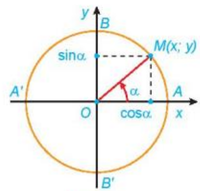
Luyện tập 4. Xác định các điểm M và N trên đường tròn lượng giác lần lượt biểu diễn các góc lượng giác có số đo bằng $-\frac{15\pi}{4}$ và 420°.

b) Các giá trị lượng giác của góc lượng giác

HĐ4. Nhắc lại khái niệm các giá trị lượng giác $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ của góc α $(0^{\circ} \le \alpha \le 180^{\circ})$ đã học ở lớp 10 (H.1.9a).



Hình 1.9a



Hình 1.9b

Ta có thể mở rộng khái niệm giá trị lượng giác cho các góc lượng giác có số đo tuỳ ý như sau:

Giả sử $M(x; y)$ là điểm trên đường tròn lượng giác, biểu diễn góc lượng giác có số đo α (H.1.9b).

- Hoành độ x của điểm M được gọi là côsin của α, kí hiệu là $\cos\alpha$.

$$\cos\alpha = x.$$

- Tung độ y của điểm M được gọi là sin của α, kí hiệu là $\sin\alpha$.

$$\sin\alpha = y.$$

- Nếu $\cos\alpha \ne 0$, tỉ số $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ được gọi là tang của α, kí hiệu là $\tan\alpha$.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y}{x} \ (x \ne 0).$$

- Nếu $\sin\alpha \ne 0$, tỉ số $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ được gọi là côtang của α, kí hiệu là $\cot\alpha$.

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{x}{y} \ (y \ne 0).$$

- Các giá trị $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của α.

Chú ý

a) Ta còn gọi trục tung là trục sin, trục hoành là trục côsin.

b) Từ định nghĩa ta suy ra:

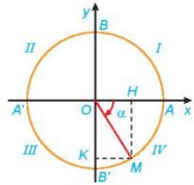
- $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ xác định với mọi giá trị của α và ta có:

$-1 \le \sin\alpha \le 1$; $\quad -1 \le \cos\alpha \le 1$; $\quad \sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$; $\quad \cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha \quad (k \in \mathbb{Z})$.

- $\tan\alpha$ xác định khi $\alpha \ne \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.
- $\cot\alpha$ xác định khi $\alpha \ne k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

- Dấu của các giá trị lượng giác của một góc lượng giác phụ thuộc vào vị trí điểm biểu diễn *M* trên đường tròn lượng giác (H.1.10).

Giá trị lượng giác \ Góc phần tư	I	II	III	IV
$\cos\alpha$	+	–	–	+
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\tan\alpha$	+	–	+	–
$\cot\alpha$	+	–	+	–



Hình 1.10

Ví dụ 5. Cho góc lượng giác có số đo bằng $-\frac{\pi}{3}$.

a) Xác định điểm *M* trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác đã cho.

b) Tính các giá trị lượng giác của góc lượng giác đã cho.

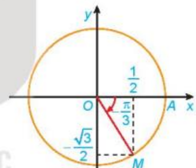
Giải

a) Điểm *M* trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo là $-\frac{\pi}{3}$ được xác định trong Hình 1.11.

b) Ta có:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2};\ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}=-\sqrt{3};\ \cot\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$



Hình 1.11

Luyện tập 4. Cho góc lượng giác có số đo bằng $\frac{5\pi}{6}$.

a) Xác định điểm *M* trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác đã cho.

b) Tính các giá trị lượng giác của góc lượng giác đã cho.

c) Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

Góc α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định
$\cot\alpha$	Không xác định	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

d) Sử dụng máy tính cầm tay để đổi số đo góc và tìm giá trị lượng giác của góc

Có thể dùng máy tính cầm tay để tính giá trị lượng giác của góc lượng giác và đổi số đo độ của cung tròn ra rađian và ngược lại.

Ví dụ 6. Sử dụng máy tính cầm tay để tính: $\sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$; $\tan 63°52'41''$ (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ tư).

Giải

Tính	Bấm phím	Màn hình hiện	Kết quả
$\sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$	MODE MODE MODE 2 sin ((−) 9 SHIFT (π) ÷ 4) =	−0.707106781	−0,7071
$\tan 63°52'41''$	MODE MODE MODE 1 tan 6 3 °'" 5 2 °'" 4 1 °'" =	2.039276645	2,0393

Ví dụ 7. a) Đổi 33°45' sang rađian; b) Đổi $\frac{3}{4}$ (rad) sang độ.

Giải

Đổi số đo	Bấm phím	Màn hình hiện	Kết quả
33°45'	MODE MODE MODE 2 3 3 °'" 4 5 °'" SHIFT (DRG▸) 1 =	0.589048622	0,5890 (rad)
$\frac{3}{4}$ (rad)	MODE MODE MODE 1 (3 ÷ 4) SHIFT (DRG▸) 2 = °'"	42°58'19"	42°58'19"

Luyện tập 5. Sử dụng máy tính cầm tay để:

a) Tính: $\cos\frac{3\pi}{7}$; $\tan(-37°25')$;

b) Đổi 179°23'30" sang rađian;

c) Đổi $\frac{7}{9}$ (rad) sang độ.

4. QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

a) Các công thức lượng giác cơ bản

HĐ5. Nhận biết các công thức lượng giác cơ bản

a) Dựa vào định nghĩa của $\sin\alpha$ *và* $\cos\alpha$, hãy tính $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

b) Sử dụng kết quả của HĐ5a và định nghĩa của $\tan\alpha$, hãy tính $1 + \tan^2\alpha$.

Đối với các giá trị lượng giác, ta có các hệ thức cơ bản sau:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}\quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right)$$
$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}\quad (\alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$$
$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1\quad \left(\alpha \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right).$$

Ví dụ 8. Tính các giá trị lượng giác của góc α, biết: $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Giải

Vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos\alpha < 0$. Mặt khác, từ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ suy ra

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

Do đó, $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\dfrac{3}{4}$ và $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} = \dfrac{1}{-\frac{3}{4}} = -\dfrac{4}{3}$.

Luyện tập 6. Tính các giá trị lượng giác của góc α, biết: $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

b) Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

HĐ6. Nhận biết liên hệ giữa giá trị lượng giác của các góc đối nhau

Xét hai điểm *M*, *N* trên đường tròn lượng giác xác định bởi hai góc đối nhau (H1.12a).

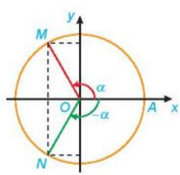
a) Có nhận xét gì về vị trí của hai điểm *M*, *N* đối với hệ trục *Oxy*. Từ đó rút ra liên hệ giữa: $\cos(-\alpha)$ và $\cos\alpha$; $\sin(-\alpha)$ và $\sin\alpha$.

b) Từ kết quả HĐ6a, rút ra liên hệ giữa: $\tan(-\alpha)$ và $\tan\alpha$; $\cot(-\alpha)$ và $\cot\alpha$.

Với kết quả HĐ6, ta có liên hệ giữa các giá trị lượng giác:

- Góc đối nhau (α và $-\alpha$)

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha.$$

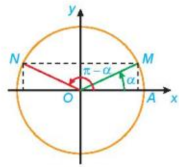


Hình 1.12a

Tương tự HĐ6, ta cũng có liên hệ giữa giá trị lượng giác của các góc bù nhau, phụ nhau và hơn kém π, như sau:

- Góc bù nhau (α và $\pi - \alpha$)

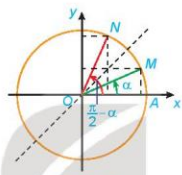
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha.$$



Hình 1.12b

- Góc phụ nhau (α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$)

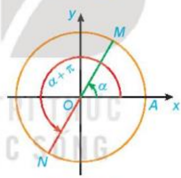
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha.$$



Hình 1.12c

- Góc hơn kém π (α và $\pi + \alpha$)

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$$
$$\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha.$$



Hình 1.12d

Chú ý. Nhờ các công thức trên, ta có thể đưa việc tính giá trị lượng giác của một góc lượng giác bất kì về việc tính giá trị lượng giác của góc α với $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.

Ví dụ 9. Tính: a) $\cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$; b) $\cot\left(-675^\circ\right)$.

Giải. Ta có:

a) $\cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right) = \cos\frac{11\pi}{4} = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi\right) = \cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\cot\left(-675^\circ\right) = \cot\left(45^\circ - 2\cdot 360^\circ\right) = \cot 45^\circ = 1$.

Luyện tập 7. Tính: a) $\sin\left(-675^\circ\right)$; b) $\tan\frac{15\pi}{4}$.

Vận dụng 2. Huyết áp của mỗi người thay đổi trong ngày. Giả sử huyết áp tâm trương (tức là áp lực máu lên thành động mạch khi tim giãn ra) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi tại thời điểm t được cho bởi công thức:

$$B(t) = 80 + 7\sin\frac{\pi t}{12},$$

trong đó t là số giờ tính từ lúc nửa đêm và $B(t)$ tính bằng mmHg (milimét thuỷ ngân). Tìm huyết áp tâm trương của người này vào các thời điểm sau:

a) 6 giờ sáng; b) 10 giờ 30 phút sáng; c) 12 giờ trưa; d) 8 giờ tối.

BÀI TẬP

1.1. Hoàn thành bảng sau:

Số đo độ	15°	?	0°	900°	?	?
Số đo radian	?	$\frac{3\pi}{8}$	?	?	$-\frac{7\pi}{12}$	$-\frac{11\pi}{8}$

1.2. Một đường tròn có bán kính 20 cm. Tìm độ dài của các cung trên đường tròn đó có số đo sau:

a) $\frac{\pi}{12}$; b) 1,5; c) 35°; d) 315°.

1.3. Trên đường tròn lượng giác, xác định điểm M biểu diễn các góc lượng giác có số đo sau:

a) $\frac{2\pi}{3}$; b) $-\frac{11\pi}{4}$; c) 150°; d) -225°.

1.4. Tính các giá trị lượng giác của góc α, biết:

a) $\cos\alpha = \frac{1}{5}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; b) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

c) $\tan\alpha = \sqrt{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; d) $\cot\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

1.5. Chứng minh các đẳng thức:

a) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$; b) $\frac{\cos^2\alpha + \tan^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha} = \tan^2\alpha$.

1.6. Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây.

a) Tính góc (theo độ và radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.

b) Tính độ dài quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính của bánh xe đạp là 680 mm.

Bài 2 CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

THUẬT NGỮ

- Công thức cộng
- Công thức nhân đôi
- Công thức biến đổi tích thành tổng
- Công thức biến đổi tổng thành tích

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Mô tả các phép biến đổi lượng giác cơ bản: công thức cộng; công thức góc nhân đôi; công thức biến đổi tích thành tổng và công thức biến đổi tổng thành tích.
- Giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với giá trị lượng giác của góc lượng giác và các phép biến đổi lượng giác.

Một thiết bị trễ kĩ thuật số lặp lại tín hiệu đầu vào bằng cách lặp lại tín hiệu đó trong một khoảng thời gian cố định sau khi nhận được tín hiệu. Nếu một thiết bị như vậy nhận được nốt thuần $f_1(t) = 5\sin t$ và phát lại được nốt thuần $f_2(t) = 5\cos t$ thì âm kết hợp là $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, trong đó t là biến thời gian. Chứng tỏ rằng âm kết hợp viết được dưới dạng $f(t) = k\sin(t + \varphi)$, tức là âm kết hợp là một sóng âm hình sin. Hãy xác định biên độ âm k và pha ban đầu φ $(-\pi \le \varphi \le \pi)$ của sóng âm.

1. CÔNG THỨC CỘNG

HĐ1. Nhận biết công thức cộng

a) Cho $a = \frac{\pi}{4}$ và $b = \frac{\pi}{6}$, hãy chứng tỏ $\cos(a - b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$.

b) Bằng cách viết $a + b = a - (-b)$ và từ công thức ở HĐ1a, hãy tính $\cos(a + b)$.

c) Bằng cách viết $\sin(a - b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a - b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right]$ và sử dụng công thức vừa thiết lập ở HĐ1b, hãy tính $\sin(a - b)$.

$$\cos(a - b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$
$$\cos(a + b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$
$$\sin(a - b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$
$$\sin(a + b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$
$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$$
$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$$
(giả thiết các biểu thức đều có nghĩa).

Ví dụ 1. Không dùng máy tính, hãy tính:

a) $\cos 75^\circ$;

b) $\tan\frac{\pi}{12}$.

Giải

a) $\cos 75^\circ = \cos\left(45^\circ + 30^\circ\right) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$

b) $\tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\frac{\pi}{3}\cdot\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{3-1} = 2 - \sqrt{3}.$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Giải

Ta có

$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4} + \cos x\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\sin x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sin x + \cos x.$

Đẳng thức được chứng minh.

Luyện tập 1. Chứng minh rằng:

a) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

b) $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1-\tan x}{1+\tan x}$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right)$.

Vận dụng 1. Giải bài toán trong *tình huống mở đầu.*

2. CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

HĐ2. Xây dựng công thức nhân đôi

Lấy $b = a$ trong các công thức cộng, hãy tìm công thức tính: $\sin 2a$; $\cos 2a$; $\tan 2a$.

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}.$$

Ví dụ 3. Cho $\cos a = -\frac{1}{3}$ $\left(\frac{\pi}{2} < a < \pi\right)$. Tính $\sin 2a$.

Giải

Vì $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ nên $\sin a > 0$. Do đó $\sin a = \sqrt{1-\cos^2 a} = \sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$

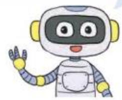
Vậy $\sin 2a = 2\sin a\cos a = 2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}.$

Luyện tập 2. Không dùng máy tính, tính $\cos\frac{\pi}{8}$.

Công thức hạ bậc:

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}.$$



3. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

HĐ3. Xây dựng công thức biến đổi tích thành tổng

a) Từ các công thức cộng $\cos(a+b)$ và $\cos(a-b)$, hãy tìm: $\cos a\cos b$; $\sin a\sin b$.

b) Từ các công thức cộng $\sin(a+b)$ và $\sin(a-b)$, hãy tìm: $\sin a\cos b$.

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]$$

$$\sin a\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$$

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right].$$

Ví dụ 4. Tính giá trị của các biểu thức:

$$A = \cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12};\quad B = \cos 75^\circ \sin 15^\circ.$$

Giải

Ta có:

$$A = \cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{7\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{7\pi}{12}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\pi\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right) = \frac{\sqrt{3}-2}{4}.$$

$$B = \frac{1}{2}\left[\sin(15^\circ-75^\circ)+\sin(15^\circ+75^\circ)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin(-60^\circ)+\sin 90^\circ\right] = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

Luyện tập 3. Không dùng máy tính, tính giá trị của các biểu thức:

$$A = \cos 75^\circ\cos 15^\circ;\quad B = \sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}.$$

4. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH

HĐ4. Xây dựng công thức biến đổi tổng thành tích

Trong các công thức biến đổi tích thành tổng ở Mục 3, đặt $u = a - b$, $v = a + b$ và viết các công thức nhận được.

$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$

$$\cos u - \cos v = -2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$

$$\sin u - \sin v = 2\cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}.$$

Ví dụ 5. Không dùng máy tính, tính giá trị của biểu thức $A = \sin\frac{\pi}{9} - \sin\frac{5\pi}{9} + \sin\frac{7\pi}{9}$.

Giải

$$A = \left(\sin\frac{\pi}{9} + \sin\frac{7\pi}{9}\right) - \sin\frac{5\pi}{9} = 2\sin\frac{4\pi}{9}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{5\pi}{9} = \sin\frac{4\pi}{9} - \sin\frac{5\pi}{9} = 0.$$

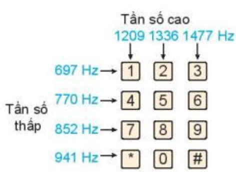
Luyện tập 4. Không dùng máy tính, tính giá trị của biểu thức

$$B = \cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{11\pi}{9}.$$

Vận dụng 2. Khi nhấn một phím trên điện thoại cảm ứng, bàn phím sẽ tạo ra hai âm thuần, kết hợp với nhau để tạo ra âm thanh nhận dạng duy nhất phím. Hình 1.13 cho thấy tần số thấp f_1 và tần số cao f_2 liên quan đến mỗi phím. Nhấn một phím sẽ tạo ra sóng âm $y = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$, ở đó t là biến thời gian (tính bằng giây).

a) Tìm hàm số mô hình hoá âm thanh được tạo ra khi nhấn phím 4.

b) Biến đổi công thức vừa tìm được ở câu a về dạng tích của một hàm số sin và một hàm số côsin.



Hình 1.13

BÀI TẬP

1.7. Sử dụng $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$, hãy tính các giá trị lượng giác của góc 15°.

1.8. Tính:

a) $\cos\left(a + \frac{\pi}{6}\right)$, biết $\sin a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$;

b) $\tan\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$, biết $\cos a = -\frac{1}{3}$ và $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$.

1.9. Tính $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\tan 2a$, biết:

a) $\sin a = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$;

b) $\sin a + \cos a = \frac{1}{2}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{4}$.

1.10. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \dfrac{\sin\frac{\pi}{15}\cos\frac{\pi}{10} + \sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{15}}{\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{15}.\sin\frac{\pi}{5}}$;

b) $B = \sin\frac{\pi}{32}\cos\frac{\pi}{32}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{8}$.

1.11. Chứng minh đẳng thức sau:

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a.$$

1.12. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 75^\circ$; $\widehat{C} = 45^\circ$ và $a = BC = 12$ cm.

a) Sử dụng công thức $S = \frac{1}{2}ab\sin C$ và định lí sin, hãy chứng minh diện tích của tam giác ABC cho bởi công thức

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin A}.$$

b) Sử dụng kết quả ở câu a và công thức biến đổi tích thành tổng, hãy tính diện tích S của tam giác ABC.

1.13. Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t, A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động.

Xét hai dao động điều hoà có phương trình:

$$x_1(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (cm)},$$

$$x_2(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ (cm)}.$$

Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

Bài 3 HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

THUẬT NGỮ
- Hàm số lượng giác
- Hàm số chẵn
- Hàm số lẻ
- Hàm số tuần hoàn
- Đồ thị của hàm số lượng giác

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Nhận biết các khái niệm về hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn.
- Nhận biết các đặc trưng hình học của đồ thị hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn.
- Nhận biết các hàm số lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ thông qua đường tròn lượng giác. Mô tả bảng giá trị của bốn hàm số lượng giác đó trên một chu kì.
- Vẽ đồ thị của các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$.
- Giải thích tập xác định; tập giá trị; tính chất chẵn, lẻ; tính tuần hoàn; chu kì; khoảng đồng biến, nghịch biến của các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ dựa vào đồ thị.
- Giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với hàm số lượng giác.

Giả sử vận tốc v (tính bằng lít/giây) của luồng khí trong một chu kì hô hấp (tức là thời gian từ lúc bắt đầu của một nhịp thở đến khi bắt đầu của nhịp thở tiếp theo) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi được cho bởi công thức

$$v = 0,85\sin\frac{\pi t}{3},$$

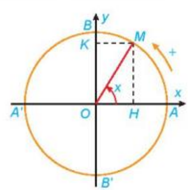
trong đó t là thời gian (tính bằng giây). Hãy tìm thời gian của một chu kì hô hấp đầy đủ và số chu kì hô hấp trong một phút của người đó.

1. ĐỊNH NGHĨA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

HĐ1. Hoàn thành bảng sau:

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\frac{\pi}{6}$	?	?	?	?
0	?	?	?	?
$-\frac{\pi}{2}$	?	?	?	?

Với mỗi số thực x, ta xác định được duy nhất một điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho số đo của góc lượng giác (OA, OM) bằng x. Do đó, ta luôn xác định được các giá trị lượng giác $\sin x$ và $\cos x$ của x lần lượt là tung độ và hoành độ của điểm M. Nếu $\cos x \neq 0$, ta định nghĩa $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ và nếu $\sin x \neq 0$, ta định nghĩa $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.



Từ đây, ta có định nghĩa sau về các hàm số lượng giác.

- Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\sin x$ được gọi là hàm số sin, kí hiệu là $y = \sin x$.

  Tập xác định của hàm số sin là $\mathbb{R}$.
- Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\cos x$ được gọi là hàm số côsin, kí hiệu là $y = \cos x$.

  Tập xác định của hàm số côsin là $\mathbb{R}$.
- Hàm số cho bằng công thức $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ được gọi là hàm số tang, kí hiệu là $y = \tan x$.

  Tập xác định của hàm số tang là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Hàm số cho bằng công thức $y = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ được gọi là hàm số côtang, kí hiệu là $y = \cot x$.

  Tập xác định của hàm số côtang là $\mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của hàm số $y = \dfrac{1}{\cos x}$.

Giải

Biểu thức $\dfrac{1}{\cos x}$ có nghĩa khi $\cos x \neq 0$, tức là $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

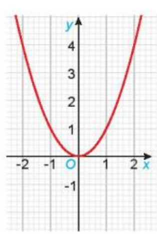
Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Luyện tập 1. Tìm tập xác định của hàm số $y = \dfrac{1}{\sin x}$.

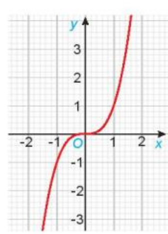
2. HÀM SỐ CHẴN, HÀM SỐ LẺ, HÀM SỐ TUẦN HOÀN

a) Hàm số chẵn, hàm số lẻ

HĐ2. Cho hai hàm số $f(x) = x^2$ và $g(x) = x^3$, với các đồ thị như hình dưới đây.



Đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2$



Đồ thị hàm số $y = g(x) = x^3$

a) Tìm các tập xác định D_f, D_g của các hàm số $f(x)$ và $g(x)$.

b) Chứng tỏ rằng $f(-x)=f(x), \forall x \in D_f$. Có nhận xét gì về tính đối xứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$ đối với hệ trục toạ độ Oxy?

c) Chứng tỏ rằng $g(-x)=-g(x), \forall x \in D_g$. Có nhận xét gì về tính đối xứng của đồ thị hàm số $y=g(x)$ đối với hệ trục toạ độ Oxy?

Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là D.

- Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số chẵn nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x)=f(x)$.

Đồ thị của một hàm số chẵn nhận trục tung là trục đối xứng.

- Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số lẻ nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x)=-f(x)$.

Đồ thị của một hàm số lẻ nhận gốc toạ độ là tâm đối xứng.

Nhận xét. Để vẽ đồ thị của một hàm số chẵn (tương ứng, lẻ), ta chỉ cần vẽ phần đồ thị của hàm số với những x dương, sau đó lấy đối xứng phần đồ thị đã vẽ qua trục tung (tương ứng, qua gốc toạ độ), ta sẽ được đồ thị của hàm số đã cho.

Ví dụ 2. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $f(x)=x\sin x$.

Giải

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

Do đó, nếu x thuộc tập xác định D thì $-x$ cũng thuộc tập xác định D.

Ta có: $f(-x)=(-x)\sin(-x)=x\sin x=f(x), \ \forall x \in D$.

Vậy $f(x)=x\sin x$ là hàm số chẵn.

Luyện tập 2. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $g(x)=\frac{1}{x}$.

b) Hàm số tuần hoàn

HĐ3. So sánh:

a) $\sin(x+2\pi)$ và $\sin x$; b) $\cos(x+2\pi)$ và $\cos x$;

c) $\tan(x+\pi)$ và $\tan x$; d) $\cot(x+\pi)$ và $\cot x$.

Hàm số $y=f(x)$ có tập xác định D được gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$ ta có:

i) $x+T \in D$ và $x-T \in D$;

ii) $f(x+T)=f(x)$.

Số T dương nhỏ nhất thoả mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn đó.

? Hàm số hằng $f(x)=c$ (c là hằng số) có phải là hàm số tuần hoàn không? Nếu hàm số tuần hoàn thì nó có chu kì không?

Nhận xét

a) Các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì 2π. Các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì π.

b) Để vẽ đồ thị của một hàm số tuần hoàn với chu kì T, ta chỉ cần vẽ đồ thị của hàm số này trên đoạn $[a; a+T]$, sau đó dịch chuyển song song với trục hoành phần đồ thị đã vẽ sang phải và sang trái các đoạn có độ dài lần lượt là $T, 2T, 3T, \ldots$ ta được toàn bộ đồ thị của hàm số.

Ví dụ 3. Xét tính tuần hoàn của hàm số $y = \sin 2x$.

Giải

Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$ và với mọi số thực x, ta có:

$$x - \pi \in \mathbb{R},\ x + \pi \in \mathbb{R},$$

$$\sin 2(x + \pi) = \sin(2x + 2\pi) = \sin 2x.$$

Vậy $y = \sin 2x$ là hàm số tuần hoàn.

Chú ý. Tổng quát, người ta chứng minh được các hàm số $y = A\sin \omega x$ và $y = A\cos \omega x$ $(\omega > 0)$ là những hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Luyện tập 3. Xét tính tuần hoàn của hàm số $y = \tan 2x$.

3. ĐỒ THỊ VÀ TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ $y = \sin x$

HĐ4. Cho hàm số $y = \sin x$.

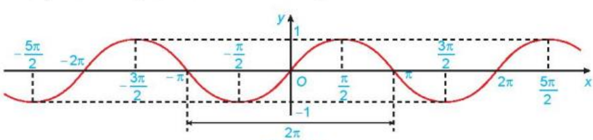
a) Xét tính chẵn, lẻ của hàm số.

b) Hoàn thành bảng giá trị sau của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$ bằng cách tính giá trị của $\sin x$ với những x không âm, sau đó sử dụng kết quả câu a để suy ra giá trị tương ứng của $\sin x$ với những x âm.

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
sinx	?	?	?	?	?	?	?	?	?

Bằng cách lấy nhiều điểm $M(x; \sin x)$ với $x \in [-\pi; \pi]$ và nối lại ta được đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi, \pi]$.

c) Bằng cách làm tương tự câu b cho các đoạn khác có độ dài bằng chu kì $T = 2\pi$, ta được đồ thị của hàm số $y = \sin x$ như hình dưới đây.



Hình 1.14

Từ đồ thị ở Hình 1.14, hãy cho biết tập giá trị, các khoảng đồng biến, các khoảng nghịch biến của hàm số $y = \sin x$.

Hàm số $y = \sin x$:
- Có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $[-1; 1]$;
- Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kì 2π;
- Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$;
- Có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ và gọi là một đường hình sin.

Ví dụ 4. Sử dụng đồ thị ở Hình 1.14, hãy xác định các giá trị của x trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ để hàm số $y = \sin x$:

a) Nhận giá trị bằng 0; b) Nhận giá trị dương.

Giải

a) Từ đồ thị ta suy ra trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, $y = 0$ khi $x = 0; x = \pi$.

b) Hàm số nhận giá trị dương ứng với phần đồ thị nằm trên trục hoành. Từ đồ thị ta suy ra trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, thì $y > 0$ khi $x \in (0; \pi)$.

Luyện tập 4. Tìm tập giá trị của hàm số $y = 2\sin x$.

Vận dụng 1. Xét *tình huống mở đầu*.

a) Giải bài toán ở *tình huống mở đầu*.

b) Biết rằng quá trình hít vào xảy ra khi $v > 0$ và quá trình thở ra xảy ra khi $v < 0$.

Trong khoảng thời gian từ 0 đến 5 giây, khoảng thời điểm nào thì người đó hít vào? người đó thở ra?

4. ĐỒ THỊ VÀ TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ $y = \cos x$

HĐ5. Cho hàm số $y = \cos x$.

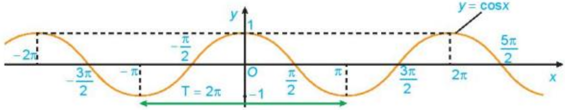
a) Xét tính chẵn, lẻ của hàm số.

b) Hoàn thành bảng giá trị sau của hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$ bằng cách tính giá trị của $\cos x$ với những x không âm, sau đó sử dụng kết quả câu a để suy ra giá trị tương ứng của $\cos x$ với những x âm.

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\cos x$	?	?	?	?	?	?	?	?	?

Bằng cách lấy nhiều điểm $M(x; \cos x)$ với $x \in [-\pi; \pi]$ và nối lại ta được đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$.

c) Bằng cách làm tương tự câu b cho các đoạn khác có độ dài bằng chu kì $T = 2\pi$, ta được đồ thị của hàm số $y = \cos x$ như hình dưới đây.



Hình 1.15

d) Từ đồ thị ở Hình 1.15, hãy cho biết tập giá trị, các khoảng đồng biến, các khoảng nghịch biến của hàm số $y = \cos x$.

> Hàm số $y = \cos x$:
> - Có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $[-1;\ 1]$;
> - Là hàm số chẵn và tuần hoàn với chu kì 2π;
> - Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi;\ k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;
> - Có đồ thị là một đường hình sin đối xứng qua trục tung.

Ví dụ 5. Sử dụng đồ thị ở Hình 1.15, hãy xác định các giá trị của x trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ để hàm số $y = \cos x$:

a) Nhận giá trị bằng 0; b) Nhận giá trị âm.

Giải

a) Từ đồ thị ta suy ra trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $y = 0$ khi $x = -\frac{3\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

b) Hàm số nhận giá trị âm ứng với phần đồ thị nằm dưới trục hoành. Từ đồ thị ta suy ra trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, thì $y < 0$ khi $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$.

Luyện tập 5. Tìm tập giá trị của hàm số $y = -3\cos x$.

Vận dụng 2. Trong Vật lí, ta biết rằng phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t, A là biên độ dao động ($A > 0$), $\omega t + \varphi$ là pha của dao động tại thời điểm t và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Dao động điều hoà này có chu kì $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (tức là khoảng thời gian để vật thực hiện một dao động toàn phần).

Giả sử một vật dao động điều hoà theo phương trình $x(t) = -5\cos 4\pi t$ (cm).

a) Hãy xác định biên độ và pha ban đầu của dao động.

b) Tính pha của dao động tại thời điểm $t = 2$ (giây). Hỏi trong khoảng thời gian 2 giây, vật thực hiện được bao nhiêu dao động toàn phần?

5. ĐỒ THỊ VÀ TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ $y = \tan x$

HĐ6. Cho hàm số $y = \tan x$.

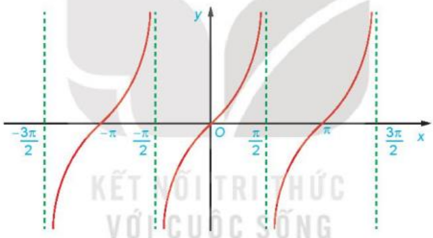
a) Xét tính chẵn, lẻ của hàm số.

b) Hoàn thành bảng giá trị sau của hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$y = \tan x$	?	?	?	?	?	?	?

Bằng cách lấy nhiều điểm $M(x; \tan x)$ với $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và nối lại, ta được đồ thị của hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

c) Bằng cách làm tương tự câu b cho các khoảng khác có độ dài bằng chu kì $T = \pi$, ta được đồ thị của hàm số $y = \tan x$ như hình dưới đây.



Hình 1.16

Từ đồ thị ở Hình 1.16, hãy tìm tập giá trị và các khoảng đồng biến của hàm số $y = \tan x$.

> Hàm số $y = \tan x$:
> - Có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$;
> - Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kì π;
> - Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$;
> - Có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ.

Ví dụ 6. Sử dụng đồ thị đã vẽ ở Hình 1.16, hãy xác định các giá trị của x trên đoạn $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ để hàm số $y = \tan x$:

a) Nhận giá trị bằng 0;　　　b) Nhận giá trị dương.

Giải

a) Từ đồ thị ta suy ra trên đoạn $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$, $y = 0$ khi $x = -\pi; x = 0; x = \pi$.

b) Hàm số nhận giá trị dương ứng với phần đồ thị nằm trên trục hoành. Từ đồ thị ta suy ra trên đoạn $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ thì $y > 0$ khi $x \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Luyện tập 6. Sử dụng đồ thị đã vẽ ở Hình 1.16, hãy xác định các giá trị của x trên đoạn $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ để hàm số $y = \tan x$ nhận giá trị âm.

6. ĐỒ THỊ VÀ TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ $y = \cot x$

HĐ7. Cho hàm số $y = \cot x$.

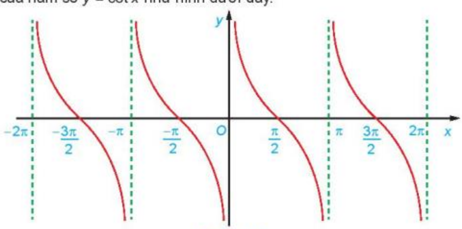
a) Xét tính chẵn, lẻ của hàm số.

b) Hoàn thành bảng giá trị sau của hàm số $y = \cot x$ trên khoảng $(0; \pi)$.

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\cot x$	?	?	?	?	?	?	?

Bằng cách lấy nhiều điểm $M(x; \cot x)$ với $x \in (0; \pi)$ và nối lại, ta được đồ thị của hàm số $y = \cot x$ trên khoảng $(0; \pi)$.

c) Bằng cách làm tương tự câu b cho các khoảng khác có độ dài bằng chu kì $T = \pi$, ta được đồ thị của hàm số $y = \cot x$ như hình dưới đây.



Hình 1.17

Từ đồ thị ở Hình 1.17, hãy tìm tập giá trị và các khoảng nghịch biến của hàm số $y = \cot x$.

> Hàm số $y = \cot x$:
> - Có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$;
> - Là hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kì π;
> - Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;
> - Có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ.

Ví dụ 7. Sử dụng đồ thị đã vẽ ở Hình 1.17, hãy xác định các giá trị của x trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ để hàm số $y = \cot x$:

a) Nhận giá trị bằng 0; b) Nhận giá trị âm.

Giải

a) Từ đồ thị ta suy ra trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ $y = 0$ khi $x = -\frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{3\pi}{2}$.

b) Hàm số nhận giá trị âm ứng với phần đồ thị nằm dưới trục hoành. Từ đồ thị ta suy ra trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ thì $y < 0$ khi $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Luyện tập 7. Sử dụng đồ thị đã vẽ ở Hình 1.17, hãy xác định các giá trị của x trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ để hàm số $y = \cot x$ nhận giá trị dương.

BÀI TẬP

1.15. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$; b) $y = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2 - \cos x}}$.

1.16. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \sin 2x + \tan 2x$; b) $y = \cos x + \sin^2 x$;

c) $y = \sin x \cos 2x$; d) $y = \sin x + \cos x$.

1.17. Tìm tập giá trị của các hàm số sau:

a) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$; b) $y = \sqrt{1 + \cos x} - 2$.

1.18. Từ đồ thị của hàm số $y = \tan x$, hãy tìm các giá trị x sao cho $\tan x = 0$.

1.19. Giả sử khi một cơn sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t) = 90\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimét trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây.

a) Tìm chu kì của sóng.

b) Tìm chiều cao của sóng, tức là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng.

Bài 4 PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

THUẬT NGỮ

- Phương trình lượng giác
- Phương trình lượng giác cơ bản
- Công thức nghiệm

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết công thức nghiệm của phương trình lượng giác cơ bản bằng cách vận dụng đồ thị hàm số lượng giác tương ứng.
- Tính nghiệm gần đúng của phương trình lượng giác cơ bản bằng máy tính cầm tay.
- Giải phương trình lượng giác ở dạng vận dụng trực tiếp phương trình lượng giác cơ bản.
- Giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với phương trình lượng giác.

Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu có độ lớn v_0 không đổi. Tìm góc bắn α để quả đạn pháo bay xa nhất, bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất.

Hình 1.18. Dàn pháo

1. KHÁI NIỆM PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

HĐ1. Nhận biết khái niệm hai phương trình tương đương

Cho hai phương trình $2x-4=0$ và $(x-2)(x^2+1)=0$.

Tìm và so sánh tập nghiệm của hai phương trình trên.

- Hai phương trình được gọi là *tương đương* khi chúng có cùng tập nghiệm.
- Nếu phương trình $f(x)=0$ tương đương với phương trình $g(x)=0$ thì ta viết

$$f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0.$$

Chú ý. Hai phương trình vô nghiệm là tương đương.

Ví dụ 1. Hai phương trình sau có tương đương không?

$$2x+6=0 \text{ và } x^2+6x+9=0.$$

Giải

Tập nghiệm của phương trình $2x+6=0$ là $S_1=\{-3\}$.

Phương trình $x^2+6x+9=0$ được viết lại thành $(x+3)^2=0$, do đó tập nghiệm của nó là $S_2=\{-3\}$.

Vậy hai phương trình trên là tương đương.

Luyện tập 1. Xét sự tương đương của hai phương trình sau:

$$\frac{x-1}{x+1}=0 \text{ và } x^2-1=0.$$

Chú ý. Để giải phương trình, thông thường ta biến đổi phương trình đó thành một phương trình tương đương đơn giản hơn. Các phép biến đổi như vậy gọi là các *phép biến đổi tương đương.*

Nếu thực hiện các phép biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện của nó thì ta được một phương trình mới tương đương với phương trình đã cho:

a) Cộng hay trừ hai vế với cùng một số hoặc một biểu thức:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)+h(x)=g(x)+h(x).$$

b) Nhân hoặc chia hai vế với cùng một số khác 0 hoặc với cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0:

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x)=g(x)h(x), (h(x)\neq 0).$$

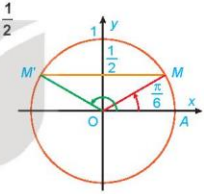
2. PHƯƠNG TRÌNH $\sin x = m$

HĐ2. Nhận biết công thức nghiệm của phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$

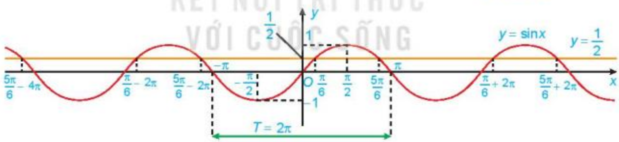
a) Quan sát Hình 1.19, tìm các nghiệm của phương trình đã cho trong nửa khoảng $[0; 2\pi)$.

b) Dựa vào tính tuần hoàn của hàm số sin, hãy viết công thức nghiệm của phương trình đã cho.

Minh hoạ bằng đồ thị: Nghiệm của phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ là hoành độ các giao điểm của đường thẳng $y=\frac{1}{2}$ và đồ thị hàm số $y=\sin x$.



Hình 1.19

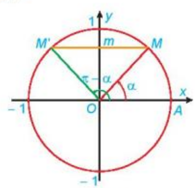


Hình 1.20. Đường thẳng $y=\frac{1}{2}$ và đồ thị hàm số $y=\sin x$

Tổng quát, xét phương trình $\sin x = m$ (*).

– Nếu $|m|>1$ thì phương trình (*) vô nghiệm vì $|\sin x|\le 1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

– Nếu $|m|\le 1$ thì tồn tại duy nhất $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ thoả mãn $\sin\alpha = m$. Khi đó, trên đoạn có độ dài 2π là $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, phương trình (*) có các nghiệm α và $\pi-\alpha$ (H.1.21).



Hình 1.21

Do tính tuần hoàn với chu kì 2π của hàm sin, ta chỉ việc cộng vào các nghiệm này các bội nguyên của 2π thì sẽ được tất cả các nghiệm của phương trình (*).

- Phương trình $\sin x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $|m| \le 1$.
- Khi $|m| \le 1$, sẽ tồn tại duy nhất $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ thoả mãn $\sin\alpha = m$. Khi đó

$$\sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý

a) Nếu số đo của góc α được cho bằng đơn vị độ thì

$$\sin x = \sin\alpha^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - \alpha^\circ + k360^\circ \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Một số trường hợp đặc biệt:

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

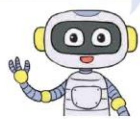
Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\sin x = \frac{1}{3}$.

Giải

a) $$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$



b) Gọi $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ là góc thoả mãn $\sin\alpha = \frac{1}{3}$. Khi đó ta có:

$$\sin x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sin 2x = \sin\left(60^\circ - 3x\right)$.

Giải

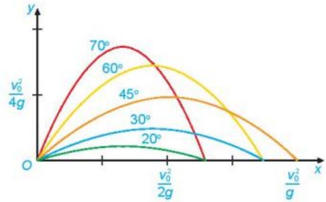
$$\sin 2x = \sin\left(60^\circ - 3x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 60^\circ - 3x + k360^\circ \\ 2x = 180^\circ - \left(60^\circ - 3x\right) + k360^\circ \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = 60^\circ + k360^\circ \\ -x = 120^\circ + k360^\circ \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 12^\circ + k72^\circ \\ x = -120^\circ - k360^\circ \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 4. Giải bài toán ở *tình huống mở đầu*.

Giải

Chọn hệ trục toạ độ có gốc toạ độ đặt tại vị trí khẩu pháo, trục Ox theo hướng khẩu pháo như hình bên. Khi đó, theo Vật lí, ta biết rằng quỹ đạo của quả đạn pháo có dạng đường parabol có phương trình (với g là gia tốc trọng trường) $y = \dfrac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$.



Cho $y = 0$ ta được $\dfrac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha = 0$, suy ra $x = 0$ hoặc $x = \dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$.

Quả đạn tiếp đất khi $x = \dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$. Ta có $x = \dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{g} \le \dfrac{v_0^2}{g}$, dấu bằng xảy ra khi $\sin 2\alpha = 1$.

Giải phương trình $\sin 2\alpha = 1$, ta được $\alpha = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Do $0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$ nên $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ hay $\alpha = 45°$.

Vậy quả đạn pháo sẽ bay xa nhất khi góc bắn bằng $45°$.

Luyện tập 2. Giải các phương trình sau: a) $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\sin 3x = -\sin 5x$.

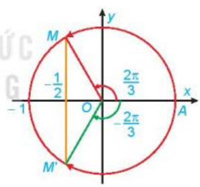
3. PHƯƠNG TRÌNH $\cos x = m$

HĐ3. Nhận biết công thức nghiệm của phương trình

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

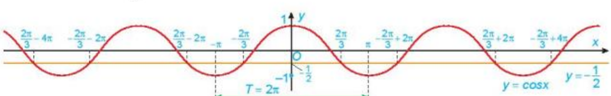
a) Quan sát Hình 1.22a, tìm các nghiệm của phương trình đã cho trong nửa khoảng $[-\pi; \pi)$.

b) Dựa vào tính tuần hoàn của hàm số côsin, hãy viết công thức nghiệm của phương trình đã cho.



Hình 1.22a

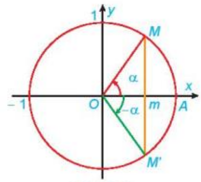
Minh hoạ bằng đồ thị: Nghiệm của phương trình $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ là hoành độ các giao điểm của đường thẳng $y = -\dfrac{1}{2}$ và đồ thị hàm số $y = \cos x$.



Hình 1.23. Đường thẳng $y = -\dfrac{1}{2}$ và đồ thị hàm số $y = \cos x$

- Phương trình $\cos x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $|m| \le 1$.
- Khi $|m| \le 1$, sẽ tồn tại duy nhất $\alpha \in [0; \pi]$ thoả mãn $\cos\alpha = m$. Khi đó

$$\cos x = m \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$



Hình 1.22b

Chú ý

a) Nếu số đo của góc α được cho bằng đơn vị độ thì

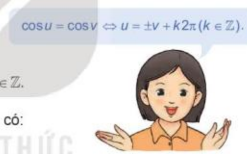
$$\cos x = \cos\alpha^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha^\circ + k360^\circ \\ x = -\alpha^\circ + k360^\circ \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Một số trường hợp đặc biệt:

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 5. Giải các phương trình sau:

a) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\cos x = 0{,}1$.



Giải

a) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\dfrac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

b) Gọi $\alpha \in [0; \pi]$ là góc thoả mãn $\cos\alpha = 0{,}1$. Khi đó ta có:

$\cos x = 0{,}1 \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 6. Giải phương trình $\cos 2x = \cos(45^\circ - x)$.

Giải

$$\cos 2x = \cos(45^\circ - x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 45^\circ - x + k360^\circ \\ 2x = -(45^\circ - x) + k360^\circ \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = 45^\circ + k360^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 15^\circ + k120^\circ \\ x = -45^\circ + k360^\circ \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Luyện tập 3. Giải các phương trình sau: a) $2\cos x = -\sqrt{2}$; b) $\cos 3x - \sin 5x = 0$.

Vận dụng

Khi Mặt Trăng quay quanh Trái Đất, mặt đối diện với Trái Đất thường chỉ được Mặt Trời chiếu sáng một phần. Các pha của Mặt Trăng mô tả mức độ phần bề mặt của nó được Mặt Trời chiếu sáng. Khi góc giữa Mặt Trời, Trái Đất và Mặt Trăng là α $(0^\circ \le \alpha \le 360^\circ)$ thì tỉ lệ F của phần Mặt Trăng được chiếu sáng cho bởi công thức

$$F = \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha).$$

(Theo trang *usno.navy.mil*).

Xác định góc α tương ứng với các pha sau của Mặt Trăng:

a) $F = 0$ (trăng mới);

b) $F = 0{,}25$ (trăng lưỡi liềm);

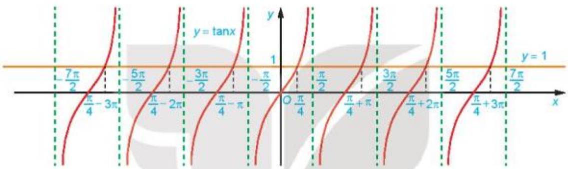
c) $F = 0{,}5$ (trăng bán nguyệt đầu tháng hoặc trăng bán nguyệt cuối tháng);

d) $F = 1$ (trăng tròn).

4. PHƯƠNG TRÌNH $\tan x = m$

HĐ4. Nhận biết công thức nghiệm của phương trình $\tan x = 1$

a) Quan sát Hình 1.24, hãy cho biết đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \tan x$ tại mấy điểm trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$?



Hình 1.24. Đường thẳng $y = 1$ và đồ thị hàm số $y = \tan x$

b) Dựa vào tính tuần hoàn của hàm tang, hãy viết công thức nghiệm của phương trình đã cho.

- Phương trình $\tan x = m$ có nghiệm với mọi m.
- Với mọi $m \in \mathbb{R}$, tồn tại duy nhất $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thoả mãn $\tan\alpha = m$. Khi đó

$$\tan x = m \Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý. Nếu số đo của góc α được cho bằng đơn vị độ thì

$$\tan x = \tan\alpha^\circ \Leftrightarrow x = \alpha^\circ + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 7. Giải các phương trình sau: a) $\tan x = -\sqrt{3}$; b) $\tan x = 2$.

Giải

a) $\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

b) Gọi $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ là góc thoả mãn $\tan\alpha = 2$. Khi đó ta có:

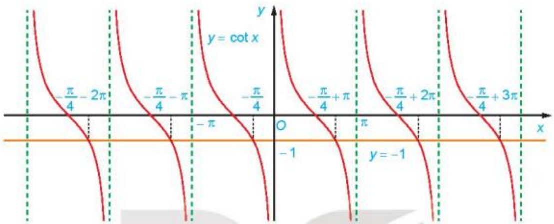
$$\tan x = 2 \Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Luyện tập 4. Giải các phương trình sau: a) $\sqrt{3}\tan 2x = -1$; b) $\tan 3x + \tan 5x = 0$.

5. PHƯƠNG TRÌNH $\cot x = m$

HĐ5. Nhận biết công thức nghiệm của phương trình $\cot x = -1$

a) Quan sát Hình 1.25, hãy cho biết đường thẳng $y = -1$ cắt đồ thị hàm số $y = \cot x$ tại mấy điểm trên khoảng $(0; \pi)$?



Hình 1.25. Đường thẳng $y = -1$ và đồ thị hàm số $y = \cot x$

b) Dựa vào tính tuần hoàn của hàm côtang, hãy viết công thức nghiệm của phương trình đã cho.

- Phương trình $\cot x = m$ có nghiệm với mọi m.
- Với mọi $m \in \mathbb{R}$, tồn tại duy nhất $\alpha \in (0; \pi)$ thoả mãn $\cot \alpha = m$. Khi đó

$$\cot x = m \Leftrightarrow \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý. Nếu số đo góc α được cho bằng đơn vị độ thì

$$\cot x = \cot \alpha^\circ \Leftrightarrow x = \alpha^\circ + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 8. Giải các phương trình sau:

a) $\cot x = -\sqrt{3}$;   b) $\cot x = 5$.

Giải

a) $\cot x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

b) Gọi $\alpha \in (0; \pi)$ là góc thoả mãn $\cot \alpha = 5$. Khi đó ta có:

$$\cot x = 5 \Leftrightarrow \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Luyện tập 5. Giải các phương trình sau: a) $\cot x = 1$;   b) $\sqrt{3}\cot x + 1 = 0$.

6. SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY TÌM MỘT GÓC KHI BIẾT GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA NÓ

Các phím ($\sin^{-1}$), ($\cos^{-1}$) và ($\tan^{-1}$) của máy tính cầm tay được dùng để tìm số đo (độ hoặc rađian) của một góc khi biết một trong các giá trị lượng giác của nó.

Để tìm số đo ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Chọn đơn vị đo góc (độ hoặc rađian).

Muốn tìm số đo độ (dòng trên cùng của màn hình xuất hiện chữ nhỏ D), ta ấn

SHIFT MODE 3

Muốn tìm số đo rađian (dòng trên cùng của màn hình xuất hiện chữ nhỏ R), ta ấn

SHIFT MODE 4

Bước 2. Tìm số đo góc.

Khi biết sin, côsin hay tang của góc α cần tìm bằng m, ta lần lượt ấn các phím SHIFT và một trong các phím sin, cos và tan, rồi nhập giá trị lượng giác m và cuối cùng ấn phím =. Lúc này trên màn hình cho kết quả là số đo của góc α (độ hoặc rađian).

Chú ý

- Khi ở chế độ rađian, các phím ($\sin^{-1}$), ($\tan^{-1}$), cho kết quả là một số thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, phím ($\cos^{-1}$) cho kết quả là một số thuộc khoảng $(0; \pi)$, tất nhiên với ($\sin^{-1}$) và ($\cos^{-1}$) thì $|m| \leq 1$.
- Khi ở chế độ số đo độ, các phím ($\sin^{-1}$) và ($\tan^{-1}$) cho kết quả là số đo góc α từ -90° đến 90°, phím ($\cos^{-1}$) cho kết quả là số đo góc α từ 0° đến 180°, với ($\sin^{-1}$) và ($\cos^{-1}$) thì $|m| \leq 1$.
- Khi có kết quả (trường hợp chọn đơn vị đo độ), ấn phím °''' thì đưa kết quả về dạng độ - phút - giây.

Ví dụ 9. Sử dụng máy tính cầm tay, tìm số đo độ và rađian của góc α, biết $\sin\alpha = 0,58$.

Giải

Số đo độ:

$\sin\alpha$	Bấm phím	Màn hình hiện	Kết quả của a (gần đúng)
0,58	SHIFT MODE 3 SHIFT sin 0 . 5 8 = °'''	35.45054264	$35^\circ 27' 2''$

Số đo rađian:

$\sin\alpha$	Bấm phím	Màn hình hiện	Kết quả của α (gần đúng)
0,58	SHIFT MODE 4 SHIFT sin 0 . 5 8 =	0.6187286907	0,61873

Luyện tập 6. Sử dụng máy tính cầm tay, tìm số đo độ và rađian của góc α, biết:

a) $\cos\alpha = -0,75$; b) $\tan\alpha = 2,46$; c) $\cot\alpha = -6,18$.

BÀI TẬP

1.20. Giải các phương trình sau:

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $2\cos x = -\sqrt{2}$;

c) $\sqrt{3}\tan\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = 1$;

d) $\cot(2x - 1) = \cot\frac{\pi}{5}$.

1.21. Giải các phương trình sau: a) $\sin 2x + \cos 4x = 0$; b) $\cos 3x = -\cos 7x$.

1.22. Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu $v_0 = 500$ m/s hợp với phương ngang một góc α. Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất thì quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình $y = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$, ở đó $g = 9{,}8$ m/s^2 là gia tốc trọng trường.

a) Tính theo góc bắn α tầm xa mà quả đạn đạt tới (tức là khoảng cách từ vị trí bắn đến điểm quả đạn chạm đất).

b) Tìm góc bắn α để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo 22 000 m.

c) Tìm góc bắn α để quả đạn đạt độ cao lớn nhất.

1.23. Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình

$$x = 2\cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right).$$

Ở đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimét. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

Em có biết?

Lượng giác được phát triển bởi các nhà thiên văn học người Hy Lạp cổ đại, những người coi bầu trời là nằm bên trong của một mặt cầu, do đó lẽ tự nhiên là các hình tam giác trên mặt cầu được nghiên cứu khá sớm bởi Menelaus ở Alexandria vào khoảng năm 100 sau Công nguyên và các hình tam giác trên mặt phẳng được nghiên cứu muộn hơn nhiều. Cuốn sách đầu tiên chứa đựng các phương pháp xử lí có hệ thống về lượng giác phẳng và lượng giác cầu được viết bởi nhà thiên văn học người Ba Tư Nasir Eddin, khoảng năm 1250 sau Công nguyên.

Regiomontanus (1436 – 1476) là người có công lớn trong việc chuyển Lượng giác từ Thiên văn học sang Toán học. Công trình của ông đã được cải tiến bởi Copernicus (1473 – 1543) và một học trò của Copernicus là Rhaeticus (1514 – 1576). Cuốn sách của Rhaeticus là cuốn sách đầu tiên định nghĩa các hàm lượng giác là tỉ số các cạnh của tam giác, mặc dù ông chưa đưa ra tên gọi như hiện nay của chúng. Các tên gọi và kí hiệu như ngày nay chúng ta dùng được đưa ra bởi Leonhard Euler (1707 – 1783), người đã xây dựng lí thuyết hiện đại về các hàm số lượng giác trong cuốn "Mở đầu về giải tích các đại lượng vô cùng bé" xuất bản năm 1748.

Lượng giác là ngành khoa học có nhiều ứng dụng. Có thể kể đến việc sử dụng Lượng giác trong các vấn đề đo đạc của Thiên văn và Địa lí, cũng như những ứng dụng phong phú của Lượng giác trong Lí thuyết số, Cơ học, Điện học, Hoá học, Sinh học, Hải dương học, Đồ hoạ máy tính, Lí thuyết âm nhạc và nhiều lĩnh vực khác.

(Theo C.B. Boyer, U.C. Merzbach, A History of Mathematics, Third Edition, Wiley, 2011).

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

A – TRẮC NGHIỆM

1.24. Biểu diễn các góc lượng giác $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{25\pi}{3}$, $\delta = \frac{17\pi}{6}$ trên đường tròn lượng giác. Các góc nào có điểm biểu diễn trùng nhau?

A. β và γ.
B. α, β, γ.
C. β, γ, δ.
D. α và β.

1.25. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là **sai**?

A. $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$.
B. $\cos(\pi - \alpha) = \cos\alpha$.
C. $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$.
D. $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$.

1.26. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là **sai**?

A. $\cos(a - b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$.
B. $\sin(a - b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$.
C. $\cos(a + b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$.
D. $\sin(a + b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$.

1.27. Rút gọn biểu thức $M = \cos(a+b)\cos(a-b) - \sin(a+b)\sin(a-b)$, ta được

A. $M = \sin 4a$.
B. $M = 1 - 2\cos^2 a$.
C. $M = 1 - 2\sin^2 a$.
D. $M = \cos 4a$.

1.28. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.
B. Hàm số $y = \cos x$ có tập giá trị là $[-1; 1]$.
C. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số lẻ.
D. Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì 2π.

1.29. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm tuần hoàn?

A. $y = \tan x + x$.
B. $y = x^2 + 1$.
C. $y = \cot x$.
D. $y = \frac{\sin x}{x}$.

1.30. Đồ thị của các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm có hoành độ thuộc đoạn $\left[-2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$?

A. 5.
B. 6.
C. 4.
D. 7.

1.31. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\cos x}{\sin x - 1}$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
B. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
D. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

B – TỰ LUẬN

1.32. Cho góc α thoả mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$; b) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$; c) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$; d) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$.

1.33. Cho góc bất kì α. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$; b) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$.

1.34. Tìm tập giá trị của các hàm số sau:

a) $y = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$; b) $y = \sin x + \cos x$.

1.35. Giải các phương trình sau:

a) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $2\sin^2 x - 1 + \cos 3x = 0$; c) $\tan\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

1.36. Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu được gọi tương ứng là huyết áp tâm thu và tâm trương. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử huyết áp của một người nào đó được mô hình hoá bởi hàm số

$$p(t) = 115 + 25\sin(160\pi t),$$

trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo phút.

a) Tìm chu kì của hàm số $p(t)$.

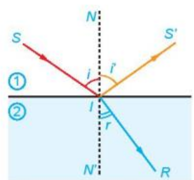
b) Tìm số nhịp tim mỗi phút.

c) Tìm chỉ số huyết áp. So sánh huyết áp của người này với huyết áp bình thường.

1.37. Khi một tia sáng truyền từ không khí vào mặt nước thì một phần tia sáng bị phản xạ trên bề mặt, phần còn lại bị khúc xạ như trong Hình 1.26. Góc tới i liên hệ với góc khúc xạ r bởi Định luật khúc xạ ánh sáng

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Ở đây, n_1 và n_2 tương ứng là chiết suất của môi trường 1 (không khí) và môi trường 2 (nước). Cho biết góc tới $i = 50°$, hãy tính góc khúc xạ, biết rằng chiết suất của không khí bằng 1 còn chiết suất của nước là 1,33.



Hình 1.26

CHƯƠNG II
DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

Chương này giới thiệu những khái niệm cơ bản về dãy số (hữu hạn và vô hạn), một loại hàm số mà biến số là những số nguyên dương, và trình bày một cách hệ thống hai dãy số đặc biệt, có nhiều ứng dụng trong thực tiễn là cấp số cộng và cấp số nhân.

Bài 5 DÃY SỐ

THUẬT NGỮ
- Dãy số
- Dãy số tăng
- Dãy số giảm
- Dãy số bị chặn

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Nhận biết dãy số hữu hạn, dãy số vô hạn.
- Thể hiện cách cho dãy số bằng liệt kê các số hạng; bằng công thức tổng quát; bằng hệ thức truy hồi; bằng cách mô tả.
- Nhận biết tính chất tăng, giảm, bị chặn của dãy số trong những trường hợp đơn giản.

Năm 2020, số dân của một thành phố trực thuộc tỉnh là khoảng 500 nghìn người. Người ta ước tính rằng số dân của thành phố đó sẽ tăng trưởng với tốc độ khoảng 2% mỗi năm. Khi đó số dân P_n (nghìn người) của thành phố đó sau n năm, kể từ năm 2020, được tính bằng công thức $P_n = 500(1+0{,}02)^n$. Hỏi nếu tăng trưởng theo quy luật như vậy thì vào năm 2030, số dân của thành phố đó là khoảng bao nhiêu nghìn người?

1. ĐỊNH NGHĨA DÃY SỐ

HĐ1. Nhận biết dãy số vô hạn

Viết năm số chính phương đầu theo thứ tự tăng dần. Từ đó, dự đoán công thức tính số chính phương thứ n.

Từ công thức nhận được, ta có quy tắc để viết được dãy gồm tất cả các số chính phương.

Số chính phương là số bằng bình phương của một số tự nhiên.

- Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một *dãy số vô hạn* (gọi tắt là dãy số), kí hiệu là $u = u(n)$.
- Ta thường viết u_n thay cho $u(n)$ và kí hiệu dãy số $u = u(n)$ bởi (u_n), do đó dãy số (u_n) được viết dưới dạng khai triển $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$

  Số u_1 gọi là *số hạng đầu*, u_n là số hạng thứ n và gọi là *số hạng tổng quát* của dãy số.

Chú ý. Nếu $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = c$ thì (u_n) được gọi là dãy số không đổi.

Ví dụ 1. Xác định số hạng đầu và số hạng tổng quát của mỗi dãy số sau:

a) Dãy số (u_n) các số tự nhiên lẻ: 1, 3, 5, 7 ...

b) Dãy số (v_n) các số nguyên dương chia hết cho 5: 5, 10, 15, 20, ...

Giải

a) Dãy (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 1$ và số hạng tổng quát $u_n = 2n - 1$.

b) Dãy (v_n) có số hạng đầu $v_1 = 5$ và số hạng tổng quát $v_n = 5n$.

HĐ2. Nhận biết dãy số hữu hạn

a) Liệt kê tất cả các số chính phương nhỏ hơn 50 và sắp xếp chúng theo thứ tự từ bé đến lớn.

b) Viết công thức số hạng u_n của các số tìm được ở câu a) và nêu rõ điều kiện của n.

- Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1; 2; 3; \ldots, m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một *dãy số hữu hạn*.
- Dạng khai triển của dãy số hữu hạn là $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Số u_1 gọi là *số hạng đầu*, số u_m gọi là *số hạng cuối*.

Ví dụ 2. Xét dãy số hữu hạn gồm các số tự nhiên lẻ nhỏ hơn 20, sắp xếp theo thứ tự từ bé đến lớn.

a) Liệt kê tất cả các số hạng của dãy số hữu hạn này.

b) Tìm số hạng đầu và số hạng cuối của dãy số đó.

Giải

a) Các số hạng của dãy số là: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.

b) Số hạng đầu của dãy số này là 1 và số hạng cuối của dãy số là 19.

Luyện tập 1. a) Xét dãy số gồm tất cả các số tự nhiên chia cho 5 dư 1 theo thứ tự tăng dần. Xác định số hạng tổng quát của dãy số.

b) Viết dãy số hữu hạn gồm năm số hạng đầu của dãy số trong câu a. Xác định số hạng đầu và số hạng cuối của dãy số hữu hạn này.

2. CÁC CÁCH CHO MỘT DÃY SỐ

HĐ3. Nhận biết các cách cho một dãy số

Xét dãy số (u_n) gồm tất cả các số nguyên dương chia hết cho 5:

$$5, 10, 15, 20, 25, 30, \ldots$$

a) Viết công thức số hạng tổng quát u_n của dãy số.

b) Xác định số hạng đầu và viết công thức tính số hạng thứ n theo số hạng thứ $n-1$ của dãy số. Công thức thu được gọi là *hệ thức truy hồi*.

Một dãy số có thể cho bằng:
- Liệt kê các số hạng (chỉ dùng cho các dãy hữu hạn và có ít số hạng);
- Công thức của số hạng tổng quát;
- Phương pháp mô tả;
- Phương pháp truy hồi.

Ví dụ 3. Tìm năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của dãy số cho bởi công thức sau:

a) $u_n = 2n$; b) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Giải

a) Năm số hạng đầu của dãy số là: 2, 4, 6, 8, 10.

Số hạng thứ 100 của dãy số là $u_{100} = 2 \cdot 100 = 200$.

b) Năm số hạng đầu của dãy số là: $-1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{5}$.

Số hạng thứ 100 của dãy số là $u_{100} = \dfrac{(-1)^{100}}{100} = \dfrac{1}{100}$.

Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1 mà chỉ có hai ước số là 1 và chính nó.

Ví dụ 4. Xét dãy số gồm tất cả các số nguyên tố theo thứ tự tăng dần. Viết năm số hạng đầu của dãy số đó.

Giải. Năm số hạng đầu của dãy số là: 2, 3, 5, 7, 11.

Chú ý. Dãy số gồm tất cả các số nguyên tố ở Ví dụ 4 được cho bởi phương pháp mô tả (số hạng thứ n là số nguyên tố thứ n). Cho đến nay người ta vẫn chưa biết có hay không một công thức tính số nguyên tố thứ n theo n (với n bất kì), hoặc là một hệ thức tính số nguyên tố thứ n theo một vài số nguyên tố đứng trước nó.

Hệ thức truy hồi là hệ thức biểu thị số hạng thứ n của dãy số qua số hạng (hay vài số hạng) đứng trước nó.

Ví dụ 5. Cho dãy số xác định bằng hệ thức truy hồi:

$$u_1 = 1,\ u_n = 3u_{n-1} + 2 \text{ với } n \geq 2.$$

Viết ba số hạng đầu của dãy số này.

Giải

Ta có: $u_1 = 1$, $u_2 = 3u_1 + 2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$, $u_3 = 3u_2 + 2 = 3 \cdot 5 + 2 = 17$.

Ví dụ 6. Giải bài toán ở *tình huống mở đầu*.

Giải

Ở đây ta có $n = 2030 - 2020 = 10$. Vậy số dân của thành phố đó vào năm 2030 sẽ là

$$P_{10} = 500 \cdot (1{,}02)^{10} \approx 609 \text{ (nghìn người).}$$

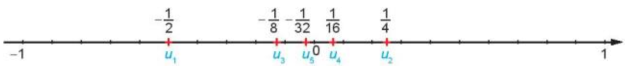
Luyện tập 2.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số (u_n) với số hạng tổng quát $u_n = n!$.

b) Viết năm số hạng đầu của dãy số Fibonacci (F_n) cho bởi hệ thức truy hồi

$$\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ (n \geq 3). \end{cases}$$

Chú ý. Để có hình ảnh trực quan về dãy số, ta thường biểu diễn các số hạng của nó trên trục số. Chẳng hạn, xét dãy số (u_n) với $u_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$. Năm số hạng đầu của dãy số này là $u_1 = -\frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{4}$, $u_3 = -\frac{1}{8}$, $u_4 = \frac{1}{16}$, $u_5 = -\frac{1}{32}$ và được biểu diễn trên trục số như sau:



3. DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM VÀ DÃY SỐ BỊ CHẶN

HĐ4. Nhận biết dãy số tăng, dãy số giảm

a) Xét dãy số (u_n) với $u_n = 3n - 1$. Tính u_{n+1} và so sánh với u_n.

b) Xét dãy số (v_n) với $v_n = \frac{1}{n^2}$. Tính v_{n+1} và so sánh với v_n.

- Dãy số (u_n) được gọi là *dãy số tăng* nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là *dãy số giảm* nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 7. Xét tính tăng, giảm của dãy số (u_n), với $u_n = -2n + 5$.

Giải

Ta có

$u_{n+1} - u_n = [-2(n+1) + 5] - (-2n + 5) = (-2n + 3) + 2n - 5 = -2 < 0$, tức là $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy (u_n) là dãy số giảm.

Luyện tập 3. Xét tính tăng, giảm của dãy số (u_n), với $u_n = \frac{1}{n+1}$.

HĐ5. Nhận biết dãy số bị chặn

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n+1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) So sánh u_n và 1.

b) So sánh u_n và 2.

- Dãy số (u_n) được gọi là *bị chặn trên* nếu tồn tại một số M sao cho
$$u_n \le M \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$
- Dãy số (u_n) được gọi là *bị chặn dưới* nếu tồn tại một số m sao cho
$$u_n \ge m \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$
- Dãy số (u_n) được gọi là *bị chặn* nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m, M sao cho $m \le u_n \le M$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 8. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n), với $u_n = \frac{n-1}{n}$.

Giải

Dãy số (u_n) bị chặn trên, vì $u_n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) cũng bị chặn dưới, vì $u_n = \frac{n-1}{n} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

Luyện tập 4. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n), với $u_n = 2n - 1$.

Vận dụng. Anh Thanh vừa được tuyển dụng vào một công ty công nghệ, được cam kết lương năm đầu sẽ là 200 triệu đồng và lương mỗi năm tiếp theo sẽ được tăng thêm 25 triệu đồng. Gọi s_n (triệu đồng) là lương vào năm thứ n mà anh Thanh làm việc cho công ty đó. Khi đó ta có:

$$s_1 = 200,\ s_n = s_{n-1} + 25 \text{ với } n \geq 2.$$

a) Tính lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty.

b) Chứng minh (s_n) là dãy số tăng. Giải thích ý nghĩa thực tế của kết quả này.

BÀI TẬP

2.1. Viết năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của các dãy số (u_n) có số hạng tổng quát cho bởi:

a) $u_n = 3n - 2$; b) $u_n = 3 \cdot 2^n$; c) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

2.2. Dãy số (u_n) cho bởi hệ thức truy hồi: $u_1 = 1$, $u_n = n \cdot u_{n-1}$ với $n \geq 2$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số.

b) Dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n.

2.3. Xét tính tăng, giảm của dãy số (u_n), biết:

a) $u_n = 2n - 1$; b) $u_n = -3n + 2$; c) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$.

2.4. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn dưới, bị chặn trên, bị chặn?

a) $u_n = n - 1$; b) $u_n = \frac{n+1}{n+2}$; c) $u_n = \sin n$; d) $u_n = (-1)^{n-1} n^2$.

2.5. Viết số hạng tổng quát của dãy số tăng gồm tất cả các số nguyên dương mà mỗi số hạng của nó:

a) Đều chia hết cho 3; b) Khi chia cho 4 dư 1.

2.6. Ông An gửi tiết kiệm 100 triệu đồng kì hạn 1 tháng với lãi suất 6% một năm theo hình thức tính lãi kép. Số tiền (triệu đồng) của ông An thu được sau n tháng được cho bởi công thức

$$A_n = 100\left(1 + \frac{0{,}06}{12}\right)^n.$$

a) Tìm số tiền ông An nhận được sau tháng thứ nhất, sau tháng thứ hai.

b) Tìm số tiền ông An nhận được sau 1 năm.

2.7. Chị Hương vay trả góp một khoản tiền 100 triệu đồng và đồng ý trả dần 2 triệu đồng mỗi tháng với lãi suất 0,8% số tiền còn lại của mỗi tháng.

Gọi A_n ($n \in \mathbb{N}$) là số tiền còn nợ (triệu đồng) của chị Hương sau n tháng.

a) Tìm lần lượt A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 để tính số tiền còn nợ của chị Hương sau 6 tháng.

b) Dự đoán hệ thức truy hồi đối với dãy số (A_n).

Em có biết?

Dãy số Fibonacci

Fibonacci
(1170 – 1250)

Fibonacci là nhà toán học nổi tiếng người Italia. Trong cuốn sách Liber Abaci (Sách tính) của ông, được viết năm 1202, có bài toán sau:

"Một đôi thỏ (gồm một thỏ đực và một thỏ cái) cứ mỗi tháng đẻ được một đôi thỏ con (cũng gồm một thỏ đực và thỏ cái); một đôi thỏ con, khi tròn 2 tháng tuổi, sau mỗi tháng đẻ ra một đôi thỏ con, và quá trình sinh nở cứ thế tiếp diễn. Hỏi sau n tháng có bao nhiêu đôi thỏ, nếu đầu năm (tháng Giêng) có một đôi thỏ sơ sinh?".

Việc giải quyết bài toán nói trên dẫn đến việc nghiên cứu dãy số (F_n) cho bởi hệ thức truy hồi

$$\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \, (n \geq 3). \end{cases}$$

Dãy số này được gọi là *dãy số Fibonacci* và các số hạng của nó được gọi là các *số Fibonacci*.

Người ta chứng minh được rằng số hạng tổng quát của dãy Fibonacci cho bởi

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Dãy số Fibonacci có rất nhiều tính chất đẹp, chẳng hạn:

1) $F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n-1}$ với mọi $n \geq 2$;

2) $F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$ với mọi $n \geq 1$;

3) $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ với mọi $n \geq 1$.

Dãy số Fibonacci liên quan mật thiết với nhiều vấn đề của Toán học, Vật lí, Hội hoạ, Âm nhạc.

Các số Fibonacci xuất hiện ở khắp nơi trong thiên nhiên.

Hầu hết các bông hoa có số cánh hoa là một trong các số: F_4, F_5, F_6, F_7, F_8, F_9, F_{10}, F_{11}. Chẳng hạn, hoa loa kèn có 3 cánh, hoa mao lương vàng có 5 cánh, hoa cải ô rô thường có 8 cánh, hoa cúc vạn thọ có 13 cánh, hoa cúc tây có 21 cánh, hoa cúc thường có 34, hoặc 55 hoặc 89 cánh.

Bài 6 CẤP SỐ CỘNG

THUẬT NGỮ
- Cấp số cộng
- Công sai
- Số hạng tổng quát
- Tổng của n số hạng đầu

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Nhận biết một dãy số là cấp số cộng.
- Giải thích công thức xác định số hạng tổng quát của cấp số cộng.
- Tính tổng của n số hạng đầu của cấp số cộng.
- Giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với cấp số cộng.

Một nhà hát có 25 hàng ghế với 16 ghế ở hàng thứ nhất, 18 ghế ở hàng thứ hai, 20 ghế ở hàng thứ ba và cứ tiếp tục theo quy luật đó, tức là hàng sau nhiều hơn hàng liền trước nó 2 ghế. Tính tổng số ghế của nhà hát đó.

1. ĐỊNH NGHĨA

HĐ1. Nhận biết cấp số cộng

Cho dãy số (u_n) gồm tất cả các số tự nhiên lẻ, xếp theo thứ tự tăng dần.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số.

b) Dự đoán công thức biểu diễn số hạng u_n theo số hạng u_{n-1}.

- Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d. Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.
- Cấp số cộng (u_n) với công sai d được cho bởi hệ thức truy hồi

$$u_n = u_{n-1} + d \text{ với } n \geq 2.$$

? Dãy số không đổi $a, a, a, \ldots$ có phải là một cấp số cộng không?

Ví dụ 1. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$. Hãy viết năm số hạng đầu của cấp số cộng này.

Giải

Năm số hạng đầu của cấp số cộng này là:

$$u_1 = 2,\ u_2 = u_1 + d = 2 + 3 = 5,\ u_3 = u_2 + d = 5 + 3 = 8,$$
$$u_4 = u_3 + d = 8 + 3 = 11,\ u_5 = u_4 + d = 11 + 3 = 14.$$

Ví dụ 2. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 5n - 1$. Chứng minh rằng (u_n) là một cấp số cộng. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của nó.

Giải

Ta có $u_n - u_{n-1} = (5n-1) - [5(n-1)-1] = 5$, với mọi $n \geq 2$.

Do đó (u_n) là cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 5 \cdot 1 - 1 = 4$ và công sai $d = 5$.

Luyện tập 1. Cho dãy số (u_n) với $u_n = -2n + 3$. Chứng minh rằng (u_n) là một cấp số cộng. Xác định số hạng đầu và công sai của cấp số cộng này.

2. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

HĐ2. Công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng

Cho cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu u_1 và công sai d.

a) Tính các số hạng u_2, u_3, u_4, u_5 theo u_1 và d.

b) Dự đoán công thức tính số hạng tổng quát u_n theo u_1 và d.

> Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì **số hạng tổng quát** u_n của nó được xác định theo công thức
>
> $$u_n = u_1 + (n-1)d.$$

Ví dụ 3. Tìm năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của cấp số cộng (u_n): 10, 5, ...

Giải

Cấp số cộng này có số hạng đầu $u_1 = 10$ và công sai $d = -5$.

Do đó năm số hạng đầu là: 10, 5, 0, −5, −10.

Số hạng thứ 100 là $u_{100} = u_1 + (100-1)d = 10 + 99 \cdot (-5) = -485$.

Ví dụ 4. Số hạng thứ 10 của một cấp số cộng (u_n) bằng 48 và số hạng thứ 18 bằng 88. Tìm số hạng thứ 100 của cấp số cộng đó.

Giải

Giả sử u_1 là số hạng đầu và d là công sai của cấp số cộng đó. Ta có:

$$u_{10} = u_1 + 9d = 48$$
$$u_{18} = u_1 + 17d = 88.$$

Giải hệ này ta được $u_1 = 3$ và $d = 5$.

Vậy số hạng thứ 100 của cấp số cộng này là $u_{100} = u_1 + 99d = 3 + 99 \cdot 5 = 498$.

Luyện tập 2. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 4n - 3$. Chứng minh rằng (u_n) là một cấp số cộng. Xác định số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng này. Từ đó viết số hạng tổng quát u_n dưới dạng $u_n = u_1 + (n-1)d$.

3. TỔNG n SỐ HẠNG ĐẦU CỦA MỘT CẤP SỐ CỘNG

HĐ3. Xây dựng công thức tính tổng n số hạng đầu của cấp số cộng

Cho cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu u_1 và công sai d.

Để tính tổng của n số hạng đầu

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n,$$

hãy lần lượt thực hiện các yêu cầu sau:

a) Biểu diễn mỗi số hạng trong tổng S_n theo số hạng đầu u_1 và công sai d.

b) Viết S_n theo thứ tự ngược lại: $S_n = u_n + u_{n-1} + \ldots + u_2 + u_1$ và sử dụng kết quả ở phần a) để biểu diễn mỗi số hạng trong tổng này theo u_1 và d.

c) Cộng từng vế hai đẳng thức nhận được ở a), b), để tính S_n theo u_1 và d.

Cho cấp số cộng (u_n) với công sai d. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Khi đó

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)d\right].$$

Chú ý. Sử dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$, ta có thể viết tổng S_n dưới dạng

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}.$$

Ví dụ 5. Giải bài toán ở *tình huống mở đầu*.

Giải. Số ghế ở mỗi hàng của nhà hát lập thành một cấp số cộng, gồm 25 số hạng, với số hạng đầu $u_1 = 16$ và công sai $d = 2$. Tổng các số hạng này là

$$S_{25} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{25} = \frac{25}{2}\left[2u_1 + (25-1)d\right] = \frac{25}{2}\left[2 \cdot 16 + 24 \cdot 2\right] = 1\,000.$$

Vậy nhà hát đó có tổng cộng 1 000 ghế.

Ví dụ 6. Cần lấy tổng của bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng 2, 5, 8, ... để được kết quả bằng 345?

Giải

Cấp số cộng này có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$. Gọi n là số các số hạng đầu của cấp số cộng cần lấy tổng, ta có

$$345 = S_n = \frac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)d\right] = \frac{n}{2}\left[2 \cdot 2 + (n-1) \cdot 3\right] = \frac{n}{2}(3n+1).$$

Do đó $3n^2 + n - 690 = 0$. Giải phương trình bậc hai này ta được $n = -\frac{230}{15}$ (loại) và $n = 15$.

Vậy phải lấy tổng của 15 số hạng đầu của cấp số cộng đã cho để được tổng bằng 345.

Vận dụng. Anh Nam được nhận vào làm việc ở một công ty về công nghệ với mức lương khởi điểm là 100 triệu đồng một năm. Công ty sẽ tăng thêm lương cho anh Nam mỗi năm là 20 triệu đồng. Tính tổng số tiền lương mà anh Nam nhận được sau 10 năm làm việc cho công ty đó.

Góc công nghệ

Kí hiệu tổng Σ và cách tính tổng bằng máy tính cầm tay

Cho dãy số (u_n). Tổng n số hạng đầu của dãy số này: $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ được kí hiệu ngắn gọn như sau: $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ (kí hiệu Σ đọc là xích ma).

Ta có thể sử dụng máy tính cầm tay để tính tổng n số hạng liên tiếp của một dãy số khi biết công thức của số hạng tổng quát.

Chẳng hạn, cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 3n + 1$. Để tính tổng 35 số hạng đầu của dãy số đó, ta có thể dùng máy tính cầm tay, nhấn lần lượt các phím: SHIFT → x, SHIFT $x^{\square}$. Khi đó màn hình hiện ra như hình bên, lưu ý rằng giao diện máy tính mặc định là x, ở đây được hiểu là n trong công thức số hạng tổng quát.

Tiếp theo ta nhập công thức số hạng tổng quát vào trong ngoặc (), rồi nhấn ↓ để nhập giá trị đầu tiên của x (ở đây là 1), sau đó nhấn ↑ để nhập giá trị cuối cùng của x (trường hợp này là 35), cuối cùng nhấn phím ⊟. Khi đó, màn hình sẽ hiển thị kết quả cần tính như hình bên.

BÀI TẬP

2.8. Xác định công sai, số hạng thứ 5, số hạng tổng quát và số hạng thứ 100 của mỗi cấp số cộng sau:

a) 4, 9, 14, 19, ...; b) 1, –1, –3, –5, ...

2.9. Viết năm số hạng đầu của mỗi dãy số (u_n) sau và xét xem nó có phải là cấp số cộng không. Nếu dãy số đó là cấp số cộng, hãy tìm công sai d và viết số hạng tổng quát của nó dưới dạng $u_n = u_1 + (n-1)d$.

a) $u_n = 3 + 5n$; b) $u_n = 6n - 4$; c) $u_1 = 2,\ u_n = u_{n-1} + n$; d) $u_1 = 2,\ u_n = u_{n-1} + 3$.

2.10. Một cấp số cộng có số hạng thứ 5 bằng 18 và số hạng thứ 12 bằng 32. Tìm số hạng thứ 50 của cấp số cộng này.

2.11. Một cấp số cộng có số hạng đầu bằng 5 và công sai bằng 2. Hỏi phải lấy tổng của bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng này để có tổng bằng 2 700?

2.12. Giá của một chiếc xe ô tô lúc mới mua là 680 triệu đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá của chiếc xe ô tô giảm 55 triệu đồng. Tính giá còn lại của chiếc xe sau 5 năm sử dụng.

2.13. Một kiến trúc sư thiết kế một hội trường với 15 ghế ngồi ở hàng thứ nhất, 18 ghế ngồi ở hàng thứ hai, 21 ghế ngồi ở hàng thứ ba, và cứ như vậy (số ghế ở hàng sau nhiều hơn 3 ghế so với số ghế ở hàng liền trước nó). Nếu muốn hội trường đó có sức chứa ít nhất 870 ghế ngồi thì kiến trúc sư đó phải thiết kế tối thiểu bao nhiêu hàng ghế?

2.14. Vào năm 2020, dân số của một thành phố là khoảng 1,2 triệu người. Giả sử mỗi năm, dân số của thành phố này tăng thêm khoảng 30 nghìn người. Hãy ước tính dân số của thành phố này vào năm 2030.

Bài 7 CẤP SỐ NHÂN

THUẬT NGỮ
- Cấp số nhân
- Công bội
- Số hạng tổng quát
- Tổng của n số hạng đầu

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Nhận biết một dãy số là cấp số nhân.
- Giải thích công thức xác định số hạng tổng quát của cấp số nhân.
- Tính tổng của n số hạng đầu của cấp số nhân.
- Giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với cấp số nhân để giải một số bài toán liên quan đến thực tiễn.

Một công ty tuyển một chuyên gia về công nghệ thông tin với mức lương năm đầu là 240 triệu đồng và cam kết sẽ tăng thêm 5% lương mỗi năm so với năm liền trước đó. Tính tổng số lương mà chuyên gia đó nhận được sau khi làm việc cho công ty 10 năm (làm tròn đến triệu đồng).

1. ĐỊNH NGHĨA

HĐ1. Nhận biết cấp số nhân

Cho dãy số (u_n) với $u_n = 3 \cdot 2^n$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số này.

b) Dự đoán hệ thức truy hồi liên hệ giữa u_n và u_{n-1}.

- Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q. Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.
- Cấp số nhân (u_n) với công bội q được cho bởi hệ thức truy hồi

$$u_n = u_{n-1} \cdot q \text{ với } n \geq 2.$$

? Dãy số không đổi $a, a, a, \ldots$ có phải là một cấp số nhân không?

Ví dụ 1. Cho cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 5$ và công bội $q = -2$. Viết năm số hạng đầu của cấp số nhân này.

Giải

Năm số hạng đầu của cấp số nhân này là:

$u_1 = 5,\ u_2 = u_1 \cdot q = 5 \cdot (-2) = -10,\ u_3 = u_2 \cdot q = (-10) \cdot (-2) = 20,$

$u_4 = u_3 \cdot q = 20 \cdot (-2) = -40,\ u_5 = u_4 \cdot q = (-40) \cdot (-2) = 80.$

Ví dụ 2. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{3^{n-1}}$. Chứng minh rằng dãy số này là một cấp số nhân. Xác định số hạng đầu và công bội của nó.

Giải

Với mọi $n \geq 2$, ta có

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{1}{3^{n-1}} \cdot \frac{3^{n-2}}{1} = \frac{1}{3},$$

tức là $u_n = \frac{1}{3} \cdot u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$.

Vậy (u_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{3^0} = 1$ và công bội $q = \frac{1}{3}$.

Để chứng minh dãy số (u_n) gồm các số khác 0 là một cấp số nhân, hãy chứng minh tỉ số $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ không đổi.

Luyện tập 1. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2 \cdot 5^n$. Chứng minh rằng dãy số này là một cấp số nhân. Xác định số hạng đầu và công bội của nó.

2. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

HĐ2. Công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân

Cho cấp số nhân (u_n) với số hạng đầu u_1 và công bội q.

a) Tính các số hạng u_2, u_3, u_4, u_5 theo u_1 và q.

b) Dự đoán công thức tính số hạng thứ n theo u_1 và q.

> Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q thì **số hạng tổng quát u_n** của nó được xác định bởi công thức
> $$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \text{ với } n \geq 2.$$

Ví dụ 3. Tìm năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của cấp số nhân: 8, −4, ...

Giải

Cấp số nhân này có số hạng đầu $u_1 = 8$ và công bội $q = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$.

Do đó năm số hạng đầu là: 8, −4, 2, −1, $\frac{1}{2}$.

Số hạng thứ 100 là: $u_{100} = u_1 \cdot q^{99} = 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{99} = -\frac{1}{2^{96}}$.

Ví dụ 4. Cho một cấp số nhân gồm các số hạng dương. Biết số hạng thứ 10 bằng 1 536 và số hạng thứ 12 bằng 6 144. Tìm số hạng thứ 20 của cấp số nhân đó.

Giải

Giả sử u_1 là số hạng đầu và q là công bội của cấp số nhân đã cho. Ta có:

$$\begin{cases} u_{10} = u_1 \cdot q^9 = 1\,536 \\ u_{12} = u_1 \cdot q^{11} = 6\,144. \end{cases}$$

Từ đây suy ra $q^2 = 4$, tức là $q = 2$ hoặc $q = -2$.

Với $q = 2$, ta tính được $u_1 = 3$.

Với $q = -2$ ta tính được $u_1 = -3$ (trường hợp này loại vì $u_1 > 0$ theo giả thiết).

Do đó $u_1 = 3$ và $q = 2$.

Vậy số hạng thứ 20 của cấp số nhân đã cho là $u_{20} = u_1 \cdot q^{19} = 3 \cdot 2^{19} = 1\,572\,864$.

Luyện tập 2. Trong một lọ nuôi cấy vi khuẩn, ban đầu có 5 000 con vi khuẩn và số lượng vi khuẩn tăng lên thêm 8% mỗi giờ. Hỏi sau 5 giờ thì số lượng vi khuẩn là bao nhiêu?

3. TỔNG CỦA *n* SỐ HẠNG ĐẦU CỦA MỘT CẤP SỐ NHÂN

HĐ3. Xây dựng công thức tính tổng *n* số hạng đầu của cấp số nhân

Cho cấp số nhân (u_n) với số hạng đầu $u_1 = a$ và công bội $q \neq 1$.

Để tính tổng của *n* số hạng đầu

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n,$$

thực hiện lần lượt các yêu cầu sau:

a) Biểu diễn mỗi số hạng trong tổng trên theo u_1 và q để được biểu thức tính tổng S_n chỉ chứa u_1 và q.

b) Từ kết quả phần a, nhân cả hai vế với q để được biểu thức tính tích $q \cdot S_n$ chỉ chứa u_1 và q.

c) Trừ từng vế hai đẳng thức nhận được ở a và b và giản ước các số hạng đồng dạng để tính $(1-q)S_n$ theo u_1 và q. Từ đó suy ra công thức tính S_n.

Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Khi đó

$$S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}.$$

? Nếu cấp số nhân có công bội $q = 1$ thì tổng *n* số hạng đầu S_n của nó bằng bao nhiêu?

Ví dụ 5. Giải bài toán ở *tình huống mở đầu*.

Giải

Lương hằng năm (triệu đồng) của chuyên gia lập thành một cấp số nhân, với số hạng đầu $u_1 = 240$ và công bội $q = 1{,}05$. Tổng số lương của chuyên gia đó sau 10 năm chính là tổng của 10 số hạng đầu của cấp số nhân này và bằng

$$S_{10} = \frac{u_1(1-q^{10})}{1-q} = \frac{240\left[1-(1{,}05)^{10}\right]}{1-1{,}05} \approx 3\,019.$$

Vậy tổng số lương (làm tròn đến triệu đồng) của chuyên gia đó sau 10 năm là 3 019 triệu đồng hay 3,019 tỉ đồng.

Ví dụ 6. Cần lấy tổng của bao nhiêu số hạng đầu của cấp số nhân 2, 6, 18, ... để được kết quả bằng 728?

Giải

Cấp số nhân này có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Gọi n là số các số hạng đầu cần lấy. Ta có

$$728 = S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{2(1-3^n)}{1-3} = 3^n - 1.$$

Từ đây ta được $3^n = 729 = 3^6$. Suy ra $n = 6$.

Vậy phải lấy 6 số hạng đầu của cấp số nhân đã cho để được tổng bằng 728.

Vận dụng. Một nhà máy tuyển thêm công nhân vào làm việc trong thời hạn ba năm và đưa ra hai phương án lựa chọn về lương như sau:

- Phương án 1: Lương tháng khởi điểm là 5 triệu đồng và sau mỗi quý, lương tháng sẽ tăng thêm 500 nghìn đồng.
- Phương án 2: Lương tháng khởi điểm là 5 triệu đồng và sau mỗi quý, lương tháng sẽ tăng thêm 5%.

Với phương án nào thì tổng lương nhận được sau ba năm làm việc của người công nhân sẽ lớn hơn?

BÀI TẬP

2.15. Xác định công bội, số hạng thứ 5, số hạng tổng quát và số hạng thứ 100 của mỗi cấp số nhân sau:

a) 1, 4, 16, ...; b) $2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \ldots$

2.16. Viết năm số hạng đầu của mỗi dãy số (u_n) sau và xem nó có phải là cấp số nhân không. Nếu nó là cấp số nhân, hãy tìm công bội q và viết công thức số hạng tổng quát của nó dưới dạng $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$.

a) $u_n = 5n$; b) $u_n = 5^n$; c) $u_1 = 1$, $u_n = nu_{n-1}$; d) $u_1 = 1$, $u_n = 5u_{n-1}$.

2.17. Một cấp số nhân có số hạng thứ 6 bằng 96 và số hạng thứ 3 bằng 12. Tìm số hạng thứ 50 của cấp số nhân này.

2.18. Một cấp số nhân có số hạng đầu bằng 5 và công bội bằng 2. Hỏi phải lấy tổng của bao nhiêu số hạng đầu của cấp số nhân này để có tổng bằng 5 115?

2.19. Một công ty xây dựng mua một chiếc máy ủi với giá 3 tỉ đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá trị của chiếc máy ủi này lại giảm 20% so với giá trị của nó trong năm liền trước đó. Tìm giá trị còn lại của chiếc máy ủi đó sau 5 năm sử dụng.

2.20. Vào năm 2020, dân số của một quốc gia là khoảng 97 triệu người và tốc độ tăng trưởng dân số là 0,91%. Nếu tốc độ tăng trưởng dân số này được giữ nguyên hằng năm, hãy ước tính dân số của quốc gia đó vào năm 2030.

2.21. Một loại thuốc được dùng mỗi ngày một lần. Lúc đầu nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân tăng nhanh, nhưng mỗi liều kế tiếp có tác dụng ít hơn liều trước đó. Lượng thuốc trong máu ở ngày thứ nhất là 50 mg, và mỗi ngày sau đó giảm chỉ còn một nửa so với ngày kề trước đó. Tính tổng lượng thuốc (tính bằng mg) trong máu của bệnh nhân sau khi dùng thuốc 10 ngày liên tiếp.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

A – TRẮC NGHIỆM

2.22. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Một dãy số tăng thì bị chặn dưới.

B. Một dãy số giảm thì bị chặn trên.

C. Một dãy số bị chặn thì phải tăng hoặc giảm.

D. Một dãy số không đổi thì bị chặn.

2.23. Cho dãy số

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ (số hạng sau bằng một nửa số hạng liền trước nó).

Công thức tổng quát của dãy số đã cho là

A. $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. B. $u_n = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$.

C. $u_n = \frac{1}{2n}$. D. $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

2.24. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 3n + 6$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Dãy số (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = 3$.

B. Dãy số (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = 6$.

C. Dãy số (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 3$.

D. Dãy số (u_n) là cấp số nhân với cộng bội $q = 6$.

2.25. Trong các dãy số cho bởi công thức truy hồi sau, dãy số nào là cấp số nhân?

A. $u_1 = -1, u_{n+1} = u_n^2$. B. $u_1 = -1, u_{n+1} = 2u_n$.

C. $u_1 = -1, u_{n+1} = u_n + 2$. D. $u_1 = -1, u_{n+1} = u_n - 2$.

2.26. Tổng 100 số hạng đầu của dãy số (u_n) với $u_n = 2n - 1$ là

A. 199. B. $2^{100} - 1$. C. 10 000. D. 9 999.

B – TỰ LUẬN

2.27. Từ 0 giờ đến 12 giờ trưa, chuông của một chiếc đồng hồ quả lắc sẽ đánh bao nhiêu tiếng, biết rằng nó chỉ đánh chuông báo giờ và số tiếng chuông bằng số giờ?

2.28. Tế bào E. Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Hỏi sau 24 giờ, tế bào ban đầu sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?

2.29. Chứng minh rằng:

a) Trong một cấp số cộng (u_n), mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và số hạng cuối, nếu có) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \text{ với } k \geq 2.$$

b) Trong một cấp số nhân, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và số hạng cuối, nếu có) đều là tích của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là

$$u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1} \text{ với } k \geq 2.$$

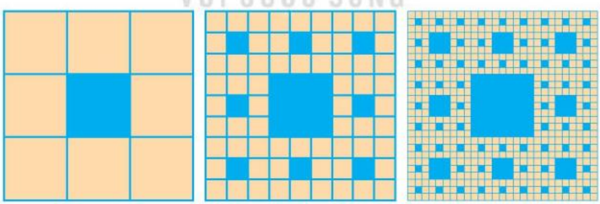
2.30. Tìm ba số, biết theo thứ tự đó chúng lập thành cấp số cộng và có tổng bằng 21, và nếu lần lượt cộng thêm các số 2; 3; 9 vào ba số đó thì được ba số lập thành một cấp số nhân.

2.31. Mặt sàn tầng một (tầng trệt) của một ngôi nhà cao hơn mặt sân 0,5 m. Cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai gồm 25 bậc, mỗi bậc cao 16 cm.

a) Viết công thức để tìm độ cao của bậc cầu thang thứ n so với mặt sân.

b) Tính độ cao của sàn tầng hai so với mặt sân.

2.32. Một hình vuông màu vàng có cạnh 1 đơn vị dài được chia thành chín hình vuông nhỏ hơn và hình vuông ở chính giữa được tô màu xanh như Hình 2.1 Mỗi hình vuông màu vàng nhỏ hơn lại được chia thành chín hình vuông con, và mỗi hình vuông con ở chính giữa lại được tô màu xanh. Nếu quá trình này được tiếp tục lặp lại năm lần, thì tổng diện tích các hình vuông được tô màu xanh bao nhiêu?



Hình 2.1

CHƯƠNG III

CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

Ở lớp 10 ta đã được làm quen với các số đặc trưng của mẫu số liệu không ghép nhóm. Trong nhiều trường hợp, ta chỉ có số liệu dưới dạng ghép nhóm. Chương này giới thiệu về mẫu số liệu ghép nhóm và cách tính các số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu này.

Bài 8 MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

THUẬT NGỮ

Mẫu số liệu ghép nhóm

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Đọc và giải thích mẫu số liệu ghép nhóm.
- Ghép nhóm mẫu số liệu.

Trong kì thi tốt nghiệp Trung học phổ thông năm 2021 đợt 1 có 344 752 thí sinh dự thi cả ba môn Toán, Vật lí, Hoá học (theo: *vietnamnet.vn, ngày 26/07/2021*). Giả sử điểm thi của các thí sinh này được cho trong bảng số liệu sau:

STT	Điểm Toán	Điểm Vật lí	Điểm Hoá học	Tổng điểm
1	8,00	7,25	7,75	23,00
2	6,00	7,75	6,50	20,25
...	...	...	...	...
344 752	4,50	5,75	6,25	16,50

Các trường đại học, cao đẳng tuyển sinh theo tổ hợp A00 quan tâm đến tổng điểm ba môn của các thí sinh này. Biểu diễn dãy số liệu về tổng điểm ba môn của các thí sinh này thế nào để các trường thấy được bức tranh tổng thể về kết quả thi?

1. GIỚI THIỆU VỀ MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

HĐ1. Xét dữ liệu cho trong *tình huống mở đầu*.

a) Mẫu số liệu về tổng điểm, kí hiệu là (T), có bao nhiêu giá trị?

b) Nếu lập bảng tần số cho mẫu số liệu (T) thì có dễ hình dung được bức tranh tổng thể về kết quả thi không? Vì sao?

c) Mẫu số liệu (T) được mô tả dưới dạng bảng thống kê sau:

Tổng điểm	< 6	$[6; 7)$	$[7; 8)$	...	$[28; 29)$	$[29; 30]$
Số thí sinh	23	69	192	...	216	12

Hãy đọc và giải thích số liệu được biểu diễn trong bảng thống kê.

Mẫu số liệu ghép nhóm là mẫu số liệu cho dưới dạng bảng tần số của các nhóm số liệu. Mỗi nhóm số liệu là tập hợp gồm các giá trị của số liệu được ghép nhóm theo một tiêu chí xác định. Nhóm số liệu thường được cho dưới dạng $[a; b)$, trong đó a là đầu mút trái, b là đầu mút phải.

Nhận xét

- Mẫu số liệu ghép nhóm được dùng khi ta không thể thu thập được số liệu chính xác hoặc do yêu cầu của bài toán mà ta phải biểu diễn mẫu số liệu dưới dạng ghép nhóm để thuận lợi cho việc tổ chức, đọc và phân tích số liệu.
- Trong một số trường hợp, nhóm số liệu cuối cùng có thể lấy đầu mút bên phải.

Ví dụ 1. Mẫu số liệu sau cho biết phân bố theo độ tuổi của dân số Việt Nam năm 2019.

Độ tuổi	Dưới 15	Từ 15 đến dưới 65 tuổi	Từ 65 tuổi trở lên
Số người	23 371 882	65 420 451	7 416 651

(Theo: *Báo cáo số liệu tổng điều tra dân số năm 2019*)

a) Mẫu số liệu đã cho có là mẫu số liệu ghép nhóm hay không?

b) Nêu các nhóm và tần số tương ứng. Dân số Việt Nam năm 2019 là bao nhiêu?

Giải

a) Mẫu số liệu đã cho là mẫu số liệu ghép nhóm.

b) Có ba nhóm là: Dưới 15 tuổi, Từ 15 đến dưới 65 tuổi, Từ 65 tuổi trở lên. Có 23 371 882 người dưới 15 tuổi; 65 420 451 người từ 15 đến dưới 65 tuổi và 7 416 651 người từ 65 tuổi trở lên.

Dân số Việt Nam năm 2019 là 23 371 882 + 65 420 451 + 7 416 651 = 96 208 984 người.

Luyện tập 1. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian (phút) đi từ nhà đến nơi làm việc của các nhân viên một công ty như sau:

Thời gian	$[15; 20)$	$[20; 25)$	$[25; 30)$	$[30; 35)$	$[35; 40)$	$[40; 45)$	$[45; 50)$
Số nhân viên	6	14	25	37	21	13	9

Đọc và giải thích mẫu số liệu này.

2. GHÉP NHÓM MẪU SỐ LIỆU

HĐ2. Chỉ số BMI (đo bằng w/h^2, trong đó w là cân nặng đơn vị là kilôgam, h là chiều cao đơn vị là mét) của các học sinh trong một tổ được cho như sau:

19,2   21,1   16,8   23,5   20,6   25,2   18,7   19,1.

Một người có chỉ số BMI nhỏ hơn 18,5 được xem là thiếu cân; từ 18,5 đến dưới 23 là có cân nặng lí tưởng so với chiều cao; từ 23 trở lên là thừa cân. Hãy lập mẫu số liệu ghép nhóm cho mẫu số liệu trên để biểu diễn tình trạng cân nặng so với chiều cao của các học sinh trong tổ.

Để chuyển mẫu số liệu không ghép nhóm sang mẫu số liệu ghép nhóm, ta làm như sau:

Bước 1. Chia miền giá trị của mẫu số liệu thành một số nhóm theo tiêu chí cho trước.

Bước 2. Đếm số giá trị của mẫu số liệu thuộc mỗi nhóm (tần số) và lập bảng thống kê cho mẫu số liệu ghép nhóm.

- Độ dài của nhóm $[a; b)$ là $b - a$.
- Không nên chia thành quá nhiều nhóm hoặc quá ít nhóm. Các nhóm không giao nhau, các nhóm nên có độ dài như nhau và tổng độ dài các nhóm lớn hơn khoảng biến thiên.

Ví dụ 2. Bảng thống kê sau cho biết thời gian chạy (phút) của 30 vận động viên (VĐV) trong một giải chạy Marathon.

Thời gian	129	130	133	134	135	136	138	141	142	143	144	145
Số VĐV	1	2	1	1	1	2	3	3	4	5	2	5

Hãy chuyển mẫu số liệu trên sang mẫu số liệu ghép nhóm gồm sáu nhóm có độ dài bằng nhau và bằng 3.

Giải

Giá trị nhỏ nhất là 129, giá trị lớn nhất là 145 nên khoảng biến thiên là $145 - 129 = 16$. Tổng độ dài của sáu nhóm là 18. Để cho đối xứng, ta chọn đầu mút trái của nhóm đầu tiên là 27,5 và đầu mút phải của nhóm cuối cùng là 145,5 ta được các nhóm là $[127,5; 130,5)$, $[130,5; 133,5)$, ..., $[142,5; 145,5)$. Đếm số giá trị thuộc mỗi nhóm, ta có mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

Thời gian	[127,5; 130,5)	[130,5; 133,5)	[133,5; 136,5)	[136,5; 139,5)	[139,5; 142,5)	[142,5; 145,5)
Số VĐV	3	1	4	3	7	12

Luyện tập 2. Cân nặng (kg) của 35 người trưởng thành tại một khu dân cư được cho như sau:

43 51 47 62 48 40 50 62 53 56 40 48 56 53 50 42 55

52 48 46 45 54 52 50 47 44 54 55 60 63 58 55 60 58 53.

Chuyển mẫu số liệu trên thành dạng ghép nhóm, các nhóm có độ dài bằng nhau, trong đó có nhóm $[40; 45)$.

Vận dụng. Một công ty may quần áo đồng phục học sinh cho biết cỡ áo theo chiều cao của học sinh được tính như sau:

Chiều cao (cm)	[150;160)	[160; 167)	[167; 170)	[170; 175)	[175; 180)
Cỡ áo	S	M	L	XL	XXL

Công ty muốn ước lượng tỉ lệ các cỡ áo khi may cho học sinh lớp 11 đã đo chiều cao của 36 học sinh nam khối 11 của một trường và thu được mẫu số liệu sau (đơn vị là centimét):

160 161 161 162 162 162 163 163 163 164 164 164 164
165 165 165 165 165 166 166 166 166 167 167 168 168
168 168 169 169 170 171 171 172 172 174.

a) Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu với các nhóm đã cho ở bảng trên.

b) Công ty may 500 áo đồng phục cho học sinh lớp 11 thì nên may số lượng áo theo mỗi cỡ là bao nhiêu chiếc?

BÀI TẬP

3.1. Trong các mẫu số liệu sau, mẫu nào là mẫu số liệu ghép nhóm? Đọc và giải thích mẫu số liệu ghép nhóm đó.

a) Số tiền mà sinh viên chi cho thanh toán cước điện thoại trong tháng.

Số tiền (nghìn đồng)	[0; 50)	[50; 100)	[100; 150)	[150; 200)	[200; 250)
Số sinh viên	5	12	23	17	3

b) Thống kê nhiệt độ tại một địa điểm trong 40 ngày, ta có bảng số liệu sau:

Nhiệt độ (°C)	[19; 22)	[22; 25)	[25; 28)	[28; 31)
Số ngày	7	15	12	6

3.2. Số sản phẩm một công nhân làm được trong một ngày được cho như sau:

18 25 39 12 54 27 46 25 19 8 36 22
20 19 17 44 5 18 23 28 25 34 46 27 16.

Hãy chuyển mẫu số liệu sang dạng ghép nhóm với sáu nhóm có độ dài bằng nhau.

3.3. Thời gian ra sân (giờ) của một số cựu cầu thủ ở giải ngoại hạng Anh qua các thời kì được cho như sau:

653 632 609 572 565 535 516 514 508 505 504 504 503 499 496 492.

(Theo: *https://www.premierleague.com/*)

Hãy chuyển mẫu số liệu trên sang dạng ghép nhóm với bảy nhóm có độ dài bằng nhau.

Bài 9 CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM

THUẬT NGỮ
- Số trung bình
- Trung vị
- Tứ phân vị
- Mốt

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Tính các số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu ghép nhóm.
- Hiểu ý nghĩa, vai trò của các số đặc trưng của mẫu số liệu thực tế.

Một cửa hàng đã ghi lại số tiền bán xăng cho 35 khách hàng đi xe máy. Mẫu số liệu gốc có dạng: $x_1, x_2, \ldots, x_{35}$ trong đó x_i là số tiền bán xăng cho khách hàng thứ i. Vì một lí do nào đó, cửa hàng chỉ có mẫu số liệu ghép nhóm dạng sau:

Số tiền (nghìn đồng)	[0; 30)	[30; 60)	[60; 90)	[90; 120)
Số khách hàng	3	15	10	7

Bảng 3.1. Số tiền khách hàng mua xăng

Dựa trên mẫu số liệu ghép nhóm này, làm thế nào để ước lượng các số đặc trưng đo xu thế trung tâm (số trung bình, trung vị, tứ phân vị, mốt) cho mẫu số liệu gốc?

Chúng ta cùng tìm hiểu vấn đề này!

1. SỐ TRUNG BÌNH CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

HĐ1. Khảo sát thời gian tự học của các học sinh trong lớp theo mẫu bên.

a) Hãy lập bảng thống kê cho mẫu số liệu ghép nhóm thu được.

b) Có thể tính chính xác thời gian tự học trung bình của các học sinh trong lớp không?

c) Có cách nào tính gần đúng thời gian tự học trung bình của các học sinh trong lớp dựa trên mẫu số liệu ghép nhóm này không?

Mỗi ngày em tự học trong bao nhiêu giờ?
A. Dưới 1,5 giờ.
B. Từ 1,5 giờ đến dưới 3 giờ.
C. Từ 3 giờ đến dưới 4,5 giờ.
D. Từ 4,5 giờ trở lên.

Cho mẫu số liệu ghép nhóm

Nhóm	$[a_1; a_2)$	...	$[a_i; a_{i+1})$	...	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số	m_1	...	m_i	...	m_k

Bảng 3.2

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm kí hiệu là $\overline{x}$.

$$\overline{x} = \frac{m_1x_1 + \ldots + m_kx_k}{n}$$

trong đó, $n = m_1 + \ldots + m_k$ là cỡ mẫu và $x_i = \dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}$ (với $i = 1, \ldots, k$) là giá trị đại diện của nhóm $[a_i; a_{i+1})$.

Chú ý. Đối với số liệu rời rạc, người ta thường cho các nhóm dưới dạng k_1 - k_2, trong đó $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Nhóm k_1 - k_2 được hiểu là nhóm gồm các giá trị k_1, $k_1 + 1$, ..., k_2. Khi đó, ta cần hiệu chỉnh mẫu dữ liệu ghép nhóm để đưa về dạng Bảng 3.2 trước khi thực hiện tính toán các số đặc trưng bằng cách hiệu chỉnh nhóm k_1 - k_2 với $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ thành nhóm $[k_1 - 0,5; k_2 + 0,5)$. Chẳng hạn, với dữ liệu ghép nhóm điểm thi môn Toán trong Bảng 3.3 sau khi hiệu chỉnh ta được Bảng 3.4.

Điểm thi	1-4	5-7	8-10
Số học sinh	5	20	10

Bảng 3.3

Điểm thi	[0,5; 4,5)	[4,5; 7,5)	[7,5; 10]
Số học sinh	5	20	10

Bảng 3.4

Ví dụ 1. Tìm cân nặng trung bình của học sinh lớp 11*D* cho trong *Bảng 3.5*.

Cân nặng	[40,5; 45,5)	[45,5; 50,5)	[50,5; 55,5)	[55,5; 60,5)	[60,5; 65,5)	[65,5; 70,5)
Số học sinh	10	7	16	4	2	3

Bảng 3.5. Cân nặng của học sinh lớp 11D

Giải

Trong mỗi khoảng cân nặng, giá trị đại diện là trung bình cộng của giá trị hai đầu mút nên ta có bảng sau:

Cân nặng (kg)	43	48	53	58	63	68
Số học sinh	10	7	16	4	2	3

Tổng số học sinh là $n = 42$. Cân nặng trung bình của học sinh lớp 11*D* là

$$\overline{x} = \frac{10 \cdot 43 + 7 \cdot 48 + 16 \cdot 53 + 4 \cdot 58 + 2 \cdot 63 + 3 \cdot 68}{42} \approx 51,81(\text{kg}).$$

Luyện tập 1. Tìm hiểu thời gian xem ti vi trong tuần trước (đơn vị: giờ) của một số học sinh thu được kết quả sau:

Thời gian (giờ)	[0; 5)	[5;10)	[10;15)	[15; 20)	[20; 25)
Số học sinh	8	16	4	2	2

Tính thời gian xem ti vi trung bình trong tuần trước của các bạn học sinh này.

Ý nghĩa. Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho số trung bình của mẫu số liệu gốc, nó cho biết vị trí trung tâm của mẫu số liệu và có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu.

2. TRUNG VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

HĐ2. Cho mẫu số liệu ghép nhóm về chiều cao của 21 cây na giống.

Chiều cao (cm)	[0; 5)	[5;10)	[10;15)	[15; 20)
Số cây	3	8	7	3

Gọi $x_1, x_2, ..., x_{21}$ là chiều cao của các cây giống, đã được sắp xếp theo thứ tự tăng dần. Khi đó, $x_1, ..., x_3$ thuộc $[0; 5)$, $x_4, ..., x_{11}$ thuộc $[5; 10)$, ... Hỏi trung vị thuộc nhóm nào?

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như trong Bảng 3.2.

> Để tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm, ta làm như sau:
> *Bước 1.* Xác định nhóm chứa trung vị. Giả sử đó là nhóm thứ p: $[a_p; a_{p+1})$.
> *Bước 2.* Trung vị là $M_e = a_p + \dfrac{\dfrac{n}{2} - (m_1 + ... + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p)$,
> trong đó n là cỡ mẫu, m_p là tần số nhóm p. Với $p = 1$, ta quy ước $m_1 + ... + m_{p-1} = 0$.

Ví dụ 2. Thời gian (phút) truy cập Internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[9,5;12,5)	[12,5; 15,5)	[15,5; 18,5)	[18,5; 21,5)	[21,5; 24,5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm này.

Giải

Cỡ mẫu là $n = 3 + 12 + 15 + 24 + 2 = 56$.

Gọi $x_1, ..., x_{56}$ là thời gian vào Internet của 56 học sinh và giả sử dãy này đã được sắp xếp theo thứ tự tăng dần. Khi đó, trung vị là $\dfrac{x_{28} + x_{29}}{2}$. Do 2 giá trị x_{28}, x_{29} thuộc nhóm [15,5; 18,5) nên nhóm này chứa trung vị. Do đó, $p = 3$; $a_3 = 15{,}5$; $m_3 = 15$; $m_1 + m_2 = 3 + 12 = 15$; $a_4 - a_3 = 3$ và ta có

$$M_e = 15{,}5 + \frac{\frac{56}{2} - 15}{15} \cdot 3 = 18{,}1.$$

Luyện tập 2. Ghi lại tốc độ bóng trong 200 lần giao bóng của một vận động viên môn quần vợt cho kết quả như bảng bên.

Tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm này.

Tốc độ v (km/h)	Số lần
$150 \le v < 155$	18
$155 \le v < 160$	28
$160 \le v < 165$	35
$165 \le v < 170$	43
$170 \le v < 175$	41
$175 \le v < 180$	35

Ý nghĩa. Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho trung vị của mẫu số liệu gốc, nó chia mẫu số liệu thành hai phần, mỗi phần chứa 50% giá trị.

3. TỨ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

HĐ3. Với mẫu số liệu ghép nhóm cho trong HĐ2, hãy cho biết tứ phân vị thứ nhất Q_1 và tứ phân vị thứ ba Q_3 thuộc nhóm nào.

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như Bảng 3.2.

Với tứ phân vị Q_1, Q_2, Q_3 lần lượt có 25%, 50%, 75% số giá trị nhỏ hơn Q_1, Q_2, Q_3.

Để tính **tứ phân vị thứ nhất Q_1** của mẫu số liệu ghép nhóm, trước hết ta xác định nhóm chứa Q_1, giả sử đó là nhóm thứ p: $[a_p; a_{p+1})$. Khi đó,

$$Q_1 = a_p + \frac{\frac{n}{4} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p),$$

trong đó, n là cỡ mẫu, m_p là tần số nhóm p, với $p = 1$ ta quy ước $m_1 + \dots + m_{p-1} = 0$.

Để tính **tứ phân vị thứ ba Q_3** của mẫu số liệu ghép nhóm, trước hết ta xác định nhóm chứa Q_3. Giả sử đó là nhóm thứ p: $[a_p; a_{p+1})$. Khi đó,

$$Q_3 = a_p + \frac{\frac{3n}{4} - (m_1 + \dots + m_{p-1})}{m_p} \cdot (a_{p+1} - a_p),$$

trong đó, n là cỡ mẫu, m_p là tần số nhóm p, với $p = 1$ ta quy ước $m_1 + \dots + m_{p-1} = 0$.

Tứ phân vị thứ hai Q_2 chính là trung vị M_e.

Ví dụ 3. Tìm tứ phân vị thứ nhất Q_1 và tứ phân vị thứ ba Q_3 của mẫu số liệu ghép nhóm cho trong Ví dụ 2.

Giải

Cỡ mẫu là $n = 56$.

Tứ phân vị thứ nhất Q_1 là $\frac{x_{14} + x_{15}}{2}$. Do x_{14}, x_{15} đều thuộc nhóm [12,5; 15,5) nên nhóm này chứa Q_1. Do đó, $p = 2$; $a_2 = 12{,}5$; $m_2 = 12$; $m_1 = 3$, $a_3 - a_2 = 3$ và ta có

$$Q_1 = 12{,}5 + \frac{\frac{56}{4} - 3}{12} \cdot 3 = 15{,}25.$$

Với tứ phân vị thứ ba Q_3 là $\frac{x_{42} + x_{43}}{2}$. Do x_{42}, x_{43} đều thuộc nhóm [18,5; 21,5) nên nhóm này chứa Q_3. Do đó, $p = 4$; $a_4 = 18{,}5$; $m_4 = 24$; $m_1 + m_2 + m_3 = 3 + 12 + 15 = 30$; $a_5 - a_4 = 3$ và ta có

$$Q_3 = 18{,}5 + \frac{\frac{3.56}{4} - 30}{24} \cdot 3 = 20.$$

Nhận xét. Ta cũng có thể xác định nhóm chứa tứ phân vị thứ r nhờ tính chất: có khoảng $\left(\frac{r \cdot n}{4}\right)$ giá trị nhỏ hơn tứ phân vị này.

Luyện tập 3. Tìm tứ phân vị thứ nhất và tứ phân vị thứ ba cho mẫu số liệu ghép nhóm ở Luyện tập 2.

Ý nghĩa. Các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho các tứ phân vị của mẫu số liệu gốc, chúng chia mẫu số liệu thành 4 phần, mỗi phần chứa 25% giá trị.

4. MỐT CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

HĐ4. Với số liệu cho trong Luyện tập 1:

a) Có thể tìm được giá trị chính xác cho mốt của mẫu số liệu gốc về thời gian xem ti vi của học sinh không?

b) Mốt thuộc nhóm nào là hợp lí nhất? Nên lấy số nào trong nhóm để ước lượng cho mốt?

Cho mẫu số liệu ghép nhóm như trong Bảng 3.2.

Để tìm **mốt** của mẫu số liệu ghép nhóm, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Xác định nhóm có tần số lớn nhất (gọi là nhóm chứa mốt), giả sử là nhóm j: $[a_j; a_{j+1})$.

Bước 2. Mốt được xác định là: $M_o = a_j + \dfrac{m_j - m_{j-1}}{(m_j - m_{j-1}) + (m_j - m_{j+1})} \cdot h$

trong đó m_j là tần số của nhóm j (quy ước $m_0 = m_{k+1} = 0$) và h là độ dài của nhóm.

Lưu ý. Người ta chỉ định nghĩa mốt cho mẫu ghép nhóm có độ dài các nhóm bằng nhau. Một mẫu có thể không có mốt hoặc có nhiều hơn một mốt.

Ví dụ 4. Bảng số liệu ghép nhóm sau cho biết chiều cao (cm) của 50 học sinh lớp 11*A*.

Khoảng chiều cao (cm)	[145; 150)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)
Số học sinh	7	14	10	10	9

Tính mốt của mẫu số liệu ghép nhóm này. Có thể kết luận gì từ giá trị tính được?

Giải

Tần số lớn nhất là 14 nên nhóm chứa mốt là nhóm [150; 155). Ta có, $j = 2$, $a_2 = 150$, $m_2 = 14$, $m_1 = 7$, $m_3 = 10$, $h = 5$. Do đó

$$M_o = 150 + \frac{14-7}{(14-7)+(14-10)} \cdot 5 \approx 153{,}18.$$

Số học sinh có chiều cao khoảng 153,18 cm là nhiều nhất.

Luyện tập 3. Thời gian (phút) để học sinh hoàn thành một câu hỏi thi được cho như sau:

Thời gian (phút)	[0,5; 10,5)	[10,5; 20,5)	[20,5; 30,5)	[30,5; 40,5)	[40,5; 50,5)
Số học sinh	2	10	6	4	3

Tìm mốt của mẫu số liệu ghép nhóm này.

Ý nghĩa. Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho mốt của mẫu số liệu gốc, nó được dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.

Vận dụng. Hãy tính các số đặc trưng cho mẫu số liệu trong Bảng 3.1 và giải thích ý nghĩa của các giá trị thu được.

BÀI TẬP

3.4. Quãng đường (km) từ nhà đến nơi làm việc của 40 công nhân một nhà máy được ghi lại như sau:

5 3 10 20 25 11 13 7 12 31 19 10 12 17 18 11 32 17 16 2
7 9 7 8 3 5 12 15 18 3 12 14 2 9 6 15 15 7 6 12.

a) Ghép nhóm dãy số liệu trên thành các khoảng có độ rộng bằng nhau, khoảng đầu tiên là [0; 5). Tìm giá trị đại diện cho mỗi nhóm.

b) Tính số trung bình của mẫu số liệu không ghép nhóm và mẫu số liệu ghép nhóm. Giá trị nào chính xác hơn?

c) Xác định nhóm chứa mốt của mẫu số liệu ghép nhóm thu được.

3.5. Tuổi thọ (năm) của 50 bình ắc quy ô tô được cho như sau:

Tuổi thọ (năm)	[2; 2,5)	[2,5; 3)	[3; 3,5)	[3,5; 4)	[4; 4,5)	[4,5; 5)
Tần số	4	9	14	11	7	5

a) Xác định mốt và giải thích ý nghĩa.

b) Tính tuổi thọ trung bình của 50 bình ắc quy ô tô này.

3.6. Điểm thi môn Toán (thang điểm 100, điểm được làm tròn đến 1) của 60 thí sinh được cho trong bảng sau:

Điểm	0 - 9	10 - 19	20 - 29	30 - 39	40 - 49
Số thí sinh	1	2	4	6	15
Điểm	50 - 59	60 - 69	70 - 79	80 - 89	90 - 99
Số thí sinh	12	10	6	3	1

a) Hiệu chỉnh để thu được mẫu số liệu ghép nhóm dạng Bảng 3.2.

b) Tìm các tứ phân vị và giải thích ý nghĩa của chúng.

3.7. Phỏng vấn một số học sinh khối 11 về thời gian (giờ) ngủ của một buổi tối, thu được bảng số liệu ở bên.

a) So sánh thời gian ngủ trung bình của các bạn học sinh nam và nữ.

b) Hãy cho biết 75% học sinh khối 11 ngủ ít nhất bao nhiêu giờ?

Thời gian	Số học sinh nam	Số học sinh nữ
[4; 5)	6	4
[5; 6)	10	8
[6; 7)	13	10
[7; 8)	9	11
[8; 9)	7	8

Em có biết?

Ta có thể sử dụng phần mềm Geogebra để tính các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm dạng Bảng 3.2 theo các bước sau đây:

Bước 1. Lập bảng tần số tích luỹ dạng sau:

Nhóm	$< a_1$	$[a_1; a_2)$	...	$[a_i; a_{i+1})$	...	$[a_k; a_{k+1})$
Tần số tích luỹ	0	c_1	...	c_i	...	c_k

trong đó $c_i = m_1 + ... + m_{i-1}$ là tần số tích luỹ.

Bước 2. Vẽ đồ thị tần số tích luỹ bằng cách nối các điểm liên tiếp $M_1(a_1; 0)$, $M_2(a_2; c_1)$, ..., $M_{k+1}(a_{k+1}; c_k)$.

Bước 3. Qua điểm $A_1\left(0; \frac{n}{4}\right)$ vẽ tia song song với Ox, cắt đồ thị tần số tích luỹ tại $B_1\left(Q_1; \frac{n}{4}\right)$, với n là cỡ mẫu, Q_1 chính là tứ phân vị thứ nhất.

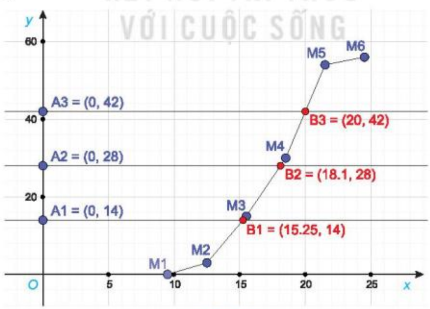
Qua điểm $A_2\left(0; \frac{n}{2}\right)$ vẽ tia song song với Ox, cắt đồ thị tần số tích luỹ tại $B_2\left(Q_2; \frac{n}{2}\right)$. Q_2 chính là tứ phân vị thứ hai.

Qua điểm $A_3\left(0; \frac{3n}{4}\right)$ vẽ tia song song với Ox, cắt đồ thị tần số tích luỹ tại $B_3\left(Q_3; \frac{3n}{4}\right)$. Q_3 chính là tứ phân vị thứ ba.

Chẳng hạn, với mẫu số liệu ghép nhóm cho trong Ví dụ 2 ta có bảng tần số tích luỹ:

Nhóm	< 9,5	[9,5; 12,5)	[12,5; 15,5)	[15,5; 18,5)	[18,5; 21,5)	[21,5; 24,5)
Tần số tích luỹ	0	3	15	30	54	56

Sử dụng phần mềm Geogebra ta có Hình 3.1.



Hình 3.1

Từ hình vẽ ta có $Q_1 = 15,25$; $Q_2 = 18,1$; $Q_3 = 20$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG III

A – TRẮC NGHIỆM

Khảo sát thời gian tập thể dục trong ngày của một số học sinh khối 11 thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số học sinh	5	9	12	10	6

Bảng 3.6

3.8. Giá trị đại diện của nhóm [20; 40) là

A. 10. B. 20. C. 30. D. 40.

3.9. Mẫu số liệu ghép nhóm này có số mốt là

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

3.10. Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu này là

A. [20; 40). B. [40; 60). C. [60; 80). D. [80; 100).

3.11. Nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất là

A. [0; 20). B. [20; 40). C. [40; 60). D. [60; 80).

3.12 Nhóm chứa trung vị là

A. [0; 200). B. [20; 40). C. [40; 60). D. [60; 80).

B – TỰ LUẬN

3.13. Cơ cấu dân số Việt Nam năm 2020 theo độ tuổi được cho trong bảng sau:

Độ tuổi	Dưới 5 tuổi	5 - 14	15 - 24	25 - 64	Trên 65
Số người (triệu)	7,89	14,68	13,32	53,78	7,66

(Theo: *http://ourworldindata.org*)

Chọn 80 là giá trị đại diện cho nhóm trên 65 tuổi. Tính tuổi trung bình của người Việt Nam năm 2020.

3.14. Người ta ghi lại tuổi thọ của một số con ong cho kết quả như sau:

Tuổi thọ (ngày)	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số lượng	5	12	23	31	29

Tìm mốt của mẫu số liệu. Giải thích ý nghĩa của giá trị nhận được.

3.15. Một bảng xếp hạng đã tính điểm chuẩn hoá cho chỉ số nghiên cứu của một số trường đại học ở Việt Nam và thu được kết quả sau:

Điểm	Dưới 20	[20; 30)	[30; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số trường	4	19	6	2	3	1

Xác định điểm ngưỡng để đưa ra danh sách 25% trường đại học có chỉ số nghiên cứu tốt nhất Việt Nam.

CHƯƠNG IV

QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

Ở các lớp dưới, ta đã học về Hình học phẳng, môn học nghiên cứu tính chất của các hình trong mặt phẳng như hình tam giác, hình tứ giác, hình tròn... Tuy nhiên, các vật thể thường gặp trong thực tế đời sống như hộp phấn, cục tẩy, chặn giấy là các hình trong không gian. Một số tính chất của những hình này đã được giới thiệu và thừa nhận trong phần Hình học trực quan. Trong chương này, ta sẽ tiếp tục học về Hình học không gian, môn học nghiên cứu tính chất của các hình trong không gian dựa trên các lập luận toán học logic và chặt chẽ. Nội dung chính của chương liên quan đến đường thẳng, mặt phẳng trong không gian và vị trí tương đối giữa chúng.

Hình học không gian đóng vai trò quan trọng trong xây dựng và đồ hoạ như vẽ kĩ thuật, in 3D, thiết kế với sự hỗ trợ của máy tính CAD (Computer Aided Design).

Bài 10 ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

THUẬT NGỮ

- Mặt phẳng
- Điểm thuộc mặt phẳng
- Các điểm đồng phẳng
- Giao tuyến của hai mặt phẳng
- Hình chóp và hình tứ diện

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết các quan hệ liên thuộc cơ bản giữa điểm, đường thẳng, mặt phẳng trong không gian.
- Mô tả ba cách xác định mặt phẳng.
- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng, giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng.
- Nhận biết hình chóp và hình tứ diện.
- Mô tả một số hình ảnh trong thực tiễn có liên quan đến đường thẳng, mặt phẳng trong không gian.

Điểm, đường thẳng và mối quan hệ liên thuộc giữa hai đối tượng hình học này đã được giới thiệu trong Hình học phẳng. Bài này tiếp tục trình bày một đối tượng hình học khác là mặt phẳng, đồng thời nghiên cứu mối quan hệ liên thuộc giữa điểm, đường thẳng với mặt phẳng.

1. KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

Mặt bảng, màn hình máy tính hay mặt nước lúc tĩnh lặng là một số hình ảnh về một phần của mặt phẳng. Mặt phẳng không có bề dày và không có giới hạn.



Chú ý

– Để biểu diễn mặt phẳng ta thường dùng một hình bình hành và viết tên của mặt phẳng vào một góc của hình. Ta cũng có thể sử dụng một góc và viết tên của mặt phẳng ở bên trong góc đó.

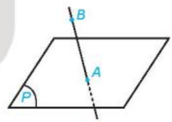
Hình 4.1

– Để kí hiệu mặt phẳng ta dùng chữ cái in hoa hoặc chữ cái Hy Lạp đặt trong dấu ngoặc ( ). Trong Hình 4.1, ta có mặt phẳng (P) và mặt phẳng (α).

❓ Hãy tìm một số hình ảnh của mặt phẳng trong thực tế.

HĐ1. Chấm phạt đền trên sân bóng đá cho ta hình ảnh về một điểm thuộc một mặt phẳng. Hãy tìm thêm các ví dụ khác cũng gợi cho ta hình ảnh đó.

a)



b)

Hình 4.2

> – Điểm A **thuộc mặt phẳng** (P), kí hiệu $A \in (P)$.
> – Điểm B **không thuộc mặt phẳng** (P), kí hiệu $B \notin (P)$.
> Nếu $A \in (P)$ ta còn nói A nằm trên (P), hoặc (P) chứa A, hoặc (P) đi qua A.

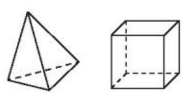
Chú ý. Để nghiên cứu hình học không gian, ta thường vẽ các hình đó lên bảng hoặc lên giấy. Hình vẽ đó được gọi là hình biểu diễn của một hình không gian. Hình biểu diễn của một hình không gian cần tuân thủ những quy tắc sau:

– Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.

– Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song, của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau.

– Hình biểu diễn giữ nguyên quan hệ liên thuộc giữa điểm và đường thẳng.

– Dùng nét vẽ liền để biểu diễn cho đường nhìn thấy và nét đứt đoạn để biểu diễn cho đường bị che khuất.



Hình 4.3. Hình biểu diễn của hình chóp tam giác đều và hình lập phương

Các quy tắc khác sẽ được học ở phần sau.

2. CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN

HĐ2. Chiếc xà ngang đặt tựa lên hai điểm *A*, *B* của trụ nhảy thể hiện hình ảnh của một đường thẳng đi qua hai điểm đó. Có thể tìm được một đường thẳng khác cũng đi qua hai điểm *A*, *B* hay không?

> Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

? Có bao nhiêu đường thẳng đi qua hai điểm trong số ba điểm không thẳng hàng?

HĐ3. Trong Hình 4.4 là một khối rubik có bốn đỉnh và bốn mặt, mỗi mặt là một tam giác.

a) Đặt khối rubik sao cho ba đỉnh của mặt màu đỏ đều nằm trên mặt bàn. Khi đó, mặt màu đỏ của khối rubik có nằm trên mặt bàn hay không?

b) Có thể đặt khối rubik sao cho bốn đỉnh của nó đều nằm trên mặt bàn hay không?

Hình 4.4

> Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

> Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

Cửu đỉnh bằng đồng ở cố đô Huế là một di sản văn hoá có giá trị to lớn của Việt Nam.

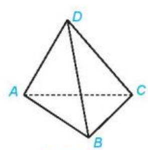
Nhận xét. Một mặt phẳng hoàn toàn xác định nếu biết ba điểm không thẳng hàng thuộc mặt phẳng đó. Ta kí hiệu mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng *A*, *B*, *C* là (ABC). Nếu có nhiều điểm cùng thuộc một mặt phẳng thì ta nói những điểm đó *đồng phẳng*. Nếu không có mặt phẳng nào chứa các điểm đó thì ta nói những điểm đó *không đồng phẳng*.

? Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua ba điểm thẳng hàng?

Ví dụ 1. Cho bốn điểm *A*, *B*, *C*, *D* không đồng phẳng (H.4.5). Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua ba trong số bốn điểm đã cho?

Giải

Có 4 mặt phẳng đi qua ba trong số bốn điểm đã cho, đó là các mặt phẳng (DAB), (DAC), (DBC) và (ABC).



Hình 4.5

Luyện tập 1. Cho tứ giác *ABCD*. Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua ba trong số bốn đỉnh của tứ giác đó?

Vận dụng 1. Hãy giải thích tại sao trong thực tiễn có nhiều đồ vật được thiết kế gồm ba chân như chân đỡ máy ảnh, giá treo tranh, kiềng ba chân treo nồi,...

HĐ4. Căng một sợi dây sao cho hai đầu của sợi dây nằm trên mặt bàn. Khi đó, sợi dây có nằm trên mặt bàn hay không?

> Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì tất cả các điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

Chú ý. Nếu mọi điểm của đường thẳng d đều thuộc mặt phẳng (P) thì ta nói đường thẳng d nằm trong (P) hoặc (P) chứa d. Khi đó ta kí hiệu là $d \subset (P)$ hoặc $(P) \supset d$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC và một điểm M thuộc đường thẳng BC (H.4.6).

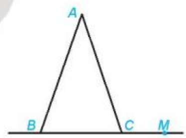
a) Điểm M có thuộc mặt phẳng (ABC) hay không?

b) Đường thẳng AM có nằm trong mặt phẳng (ABC) hay không?

Giải

a) Đường thẳng BC có hai điểm phân biệt B, C thuộc mặt phẳng (ABC) nên đường thẳng BC nằm trong mặt phẳng (ABC). Vì M thuộc đường thẳng BC nên M thuộc mặt phẳng (ABC).

b) Đường thẳng AM có hai điểm phân biệt A, M thuộc mặt phẳng (ABC) nên đường thẳng AM nằm trong mặt phẳng (ABC).

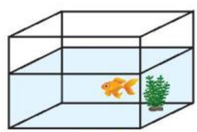


Hình 4.6

Luyện tập 2. Trong Ví dụ 2, lấy điểm N thuộc đường thẳng AB sao cho N khác M. Đường thẳng MN có thuộc mặt phẳng (ABC) hay không?

HĐ5. Trong Hình 4.7, mặt nước và thành bể có giao nhau theo đường thẳng hay không?

> Nếu hai mặt phẳng phân biệt có điểm chung thì các điểm chung của hai mặt phẳng là một đường thẳng đi qua điểm chung đó.



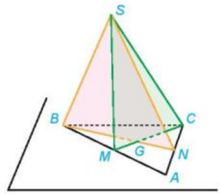
Hình 4.7

Chú ý. Đường thẳng chung d (nếu có) của hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng đó và kí hiệu là $d = (P) \cap (Q)$.

Ví dụ 3. Cho tam giác *ABC* và một điểm *S* không thuộc mặt phẳng (*ABC*). Gọi *M*, *N* lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng *AB*, *AC* (H.4.8).

a) Chỉ ra một điểm chung của hai mặt phẳng (*SBN*), (*SCM*) và khác điểm *S*.

b) Giao tuyến của hai mặt phẳng (*SBN*) và (*SCM*) có đi qua trọng tâm của tam giác *ABC* hay không?



Hình 4.8

Giải

a) Trong tam giác *ABC*, hai đường trung tuyến *BN* và *CM* cắt nhau tại trọng tâm *G* của tam giác. Điểm *G* thuộc *BN* nên cũng thuộc mặt phẳng (*SBN*). Điểm *G* thuộc *CM* nên cũng thuộc mặt phẳng (*SCM*). Vậy *G* là một điểm chung của hai mặt phẳng (*SBN*) và (*SCM*).

b) Vì *S*, *G* là hai điểm chung của hai mặt phẳng (*SBN*) và (*SCM*) nên giao tuyến của hai mặt phẳng này là đường thẳng *SG*. Đường thẳng này đi qua trọng tâm *G* của tam giác *ABC*.

Để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng, ta tìm hai điểm cùng thuộc cả hai mặt phẳng đó.

Nhận xét. Hai đường trung tuyến trong một tam giác cắt nhau tại trọng tâm của tam giác là một tính chất đã được học trong hình học phẳng. Trong ví dụ trên, tính chất này đã được áp dụng cho tam giác *ABC* trong mặt phẳng (*ABC*).

Trong trường hợp tổng quát, ta có tính chất sau:

> Trên mỗi mặt phẳng, tất cả các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

Luyện tập 3. Trong Ví dụ 3, hãy xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (*SBM*) và (*SCN*).

3. CÁCH XÁC ĐỊNH MỘT MẶT PHẲNG

Ở mục 2, ta đã thừa nhận kết quả sau:

> Một mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.

Mục này sẽ tiếp tục giới thiệu thêm hai cách xác định một mặt phẳng.

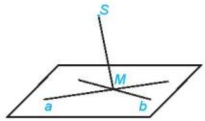
HĐ6. Cho đường thẳng *d* và điểm *A* không thuộc *d*. Trên đường thẳng *d* lấy hai điểm phân biệt *B*, *C* (H.4.9). Mặt phẳng (*ABC*) có chứa điểm *A* và đường thẳng *d* hay không? Mặt phẳng (*ABC*) có chứa hai đường thẳng *AB* và *BC* hay không?

Hình 4.9

> - Một mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.
> - Một mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

Chú ý. Mặt phẳng được xác định bởi điểm A và đường thẳng d không chứa A được kí hiệu là mp(A, d). Mặt phẳng được xác định bởi hai đường thẳng cắt nhau a và b được kí hiệu là mp(a, b).

Ví dụ 4. Cho hai đường thẳng cắt nhau a, b và gọi S là một điểm không thuộc mp(a, b) (H.4.10). Xác định giao tuyến của mp(S, a) và mp(S, b).



Hình 4.10

Giải

Gọi M là giao điểm của a và b. Vì M thuộc a nên M thuộc mp(S, a). Vì M thuộc b nên M thuộc mp(S, b). Hai điểm S, M cùng thuộc mp(S, a) và mp(S, b) nên giao tuyến của hai mặt phẳng đó là đường thẳng SM.

Luyện tập 4. Trong Ví dụ 4, vẽ một đường thẳng c cắt cả hai đường thẳng a và b. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng: mp(S, a) và mp(S, c); mp(S, b) và mp(S, c).

Vận dụng 2. Để tránh cho cửa ra vào không bị va đập vào các đồ dùng xung quanh (do mở cửa quá mạnh hoặc do gió to dập cửa), người ta thường sử dụng một phụ kiện là hít cửa nam châm. Hãy giải thích tại sao khi cửa được hút tới vị trí của nam châm thì cánh cửa được giữ cố định.

4. HÌNH CHÓP VÀ HÌNH TỨ DIỆN

HĐ7. Các hình ảnh dưới đây có đặc điểm chung nào với hình chóp tam giác đều mà em đã học ở lớp 8?



- Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ và một điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đó. Nối S với các đỉnh A_1, A_2, ..., A_n để được n tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1. Hình gồm n tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1 và đa giác $A_1A_2...A_n$ được gọi là hình chóp và kí hiệu là $S.A_1A_2...A_n$.
- Trong hình chóp $S.A_1A_2...A_n$, điểm S được gọi là *đỉnh* và đa giác $A_1A_2...A_n$ được gọi là *mặt đáy*; các tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1 được gọi là các *mặt bên*; các cạnh SA_1, SA_2, ..., SA_n được gọi là các *cạnh bên*; các cạnh A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 được gọi là các *cạnh đáy*.

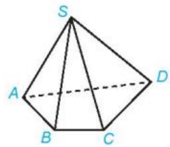
Chú ý

Tên của hình chóp được gọi dựa theo tên của đa giác đáy, ví dụ hình chóp có đáy là tứ giác được gọi là hình chóp tứ giác.

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ (H.4.11). Hình chóp đó có bao nhiêu đỉnh, bao nhiêu cạnh?

Giải

Hình chóp $S.ABCD$ có 5 đỉnh là S, A, B, C, D và có 8 cạnh là $SA, SB, SC, SD, AB, BC, CD, DA$.



Hình 4.11

Luyện tập 5. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi tên các mặt bên và mặt đáy của hình chóp đó.

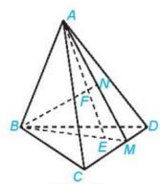
HĐ8. Trong các hình chóp ở HĐ7, hình chóp nào có ít đỉnh nhất? Xác định số đỉnh, số cạnh và số mặt của hình chóp đó.

- Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD và BCD được gọi là hình tứ diện và được kí hiệu là $ABCD$.
- Trong hình tứ diện $ABCD$, các điểm A, B, C, D được gọi là các *đỉnh* của tứ diện, các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, AC, BD được gọi là các *cạnh* của tứ diện, các tam giác ABC, ACD, ABD, BCD được gọi là các *mặt* của tứ diện.
- Trong hình tứ diện, hai cạnh không có đỉnh chung được gọi là *hai cạnh đối diện*, đỉnh không nằm trên một mặt được gọi là *đỉnh đối diện* với mặt đó.

Hình tứ diện có bốn mặt là các tam giác đều gọi là *hình tứ diện đều*.

Nhận xét. Hình tứ diện là một hình chóp tam giác mà mặt nào của hình tứ diện cũng có thể được coi là mặt đáy.

Ví dụ 6. Cho hình tứ diện $ABCD$ và E là một điểm nằm trong tam giác BCD. Gọi F là một điểm nằm giữa A và E (H.4.12). Xác định giao điểm của đường thẳng BF và mặt phẳng (ACD).



Hình 4.12

Giải

Vì điểm E nằm trong tam giác BCD nên đường thẳng BE cắt cạnh CD tại một điểm M. Các điểm A, E thuộc mặt phẳng (ABM) nên đường thẳng AE thuộc mặt phẳng (ABM), do đó điểm F thuộc mặt phẳng (ABM). Như vậy các điểm A, B, E, F, M cùng thuộc mặt phẳng (ABM).

Trong tam giác ABM, đường thẳng BF cắt AM tại N. Vì N thuộc AM và A, M cùng thuộc mặt phẳng (ACD) nên N thuộc mặt phẳng (ACD). Vậy N là giao điểm của đường thẳng BF và mặt phẳng (ACD).

Để xác định giao điểm của một đường thẳng và một mặt phẳng, ta có thể tìm giao điểm của đường thẳng đó với một đường thẳng nằm trong mặt phẳng đã cho.

Luyện tập 6. Trong Ví dụ 6, xác định giao điểm của đường thẳng DF và mặt phẳng (ABC).

BÀI TẬP

4.1. Trong không gian, cho hai đường thẳng *a*, *b* và mặt phẳng (*P*). Những mệnh đề nào sau đây là đúng?

a) Nếu *a* chứa một điểm nằm trong (*P*) thì *a* nằm trong (*P*).

b) Nếu *a* chứa hai điểm phân biệt thuộc (*P*) thì *a* nằm trong (*P*).

c) Nếu *a* và *b* cùng nằm trong (*P*) thì giao điểm (nếu có) của *a* và *b* cũng nằm trong (*P*).

d) Nếu *a* nằm trong (*P*) và *a* cắt *b* thì *b* nằm trong (*P*).

4.2. Cho tam giác *ABC* và điểm *S* không thuộc mặt phẳng (*ABC*). Lấy *D*, *E* là các điểm lần lượt thuộc các cạnh *SA*, *SB* và *D*, *E* khác *S*.

a) Đường thẳng *DE* có nằm trong mặt phẳng (*SAB*) không?

b) Giả sử *DE* cắt *AB* tại *F*. Chứng minh rằng *F* là điểm chung của hai mặt phẳng (*SAB*) và (*CDE*).

4.3. Cho mặt phẳng (*P*) và hai đường thẳng *a*, *b* nằm trong (*P*). Một đường thẳng *c* cắt hai đường thẳng *a* và *b* tại hai điểm phân biệt. Chứng minh rằng đường thẳng *c* nằm trong mặt phẳng (*P*).

4.4. Cho hình chóp tứ giác *S.ABCD* và *M* là một điểm thuộc cạnh *SC* (*M* khác *S*, *C*). Giả sử hai đường thẳng *AB* và *CD* cắt nhau tại *N*. Chứng minh rằng đường thẳng *MN* là giao tuyến của hai mặt phẳng (*ABM*) và (*SCD*).

4.5. Cho hình chóp tứ giác *S.ABCD* và lấy một điểm *E* thuộc cạnh *SA* của hình chóp (*E* khác *S*, *A*). Trong mặt phẳng (*ABCD*) vẽ một đường thẳng *d* cắt các cạnh *CB*, *CD* lần lượt tại *M*, *N* và cắt các tia *AB*, *AD* lần lượt tại *P*, *Q*.

a) Xác định giao điểm của mp(*E*, *d*) với các cạnh *SB*, *SD* của hình chóp.

b) Xác định giao tuyến của mp(*E*, *d*) với các mặt của hình chóp.

4.6. Cho hình tứ diện *ABCD*. Trên các cạnh *AC*, *BC*, *BD* lần lượt lấy các điểm *M*, *N*, *P* sao cho $AM = CM$, $BN = CN$, $BP = 2DP$.

a) Xác định giao điểm của đường thẳng *CD* và mặt phẳng (*MNP*).

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (*ACD*) và (*MNP*).

4.7. Tại các nhà hàng, khách sạn, nhân viên phục vụ bàn thường xuyên phải bưng bê nhiều khay, đĩa đồ ăn khác nhau. Một trong những nguyên tắc nhân viên cần nhớ là khay phải được bưng bằng ít nhất 3 ngón tay. Hãy giải thích tại sao.

4.8. Bàn cắt giấy là một dụng cụ được sử dụng thường xuyên ở các cửa hàng photo-copy. Bàn cắt giấy gồm hai phần chính: phần bàn hình chữ nhật có chia kích thước giấy và phần dao cắt có một đầu được cố định vào bàn. Hãy giải thích tại sao khi sử dụng bàn cắt giấy thì các đường cắt luôn là đường thẳng.

Bài 11 HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

THUẬT NGỮ
- Hai đường thẳng đồng phẳng
- Hai đường thẳng chéo nhau

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Nhận biết vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian: hai đường thẳng trùng nhau, song song, cắt nhau, chéo nhau.
- Giải thích tính chất cơ bản của hai đường thẳng song song trong không gian.
- Vận dụng kiến thức về hai đường thẳng song song để mô tả một số hình ảnh trong thực tiễn.

Để giải quyết vấn đề tắc đường ở các thành phố lớn, có rất nhiều giải pháp được đưa ra. Trong đó giải pháp xây dựng các hệ thống cầu vượt, đường hoặc đường sắt trên cao đã và đang được đưa vào thực tế ở Việt Nam. Toán học mô tả vị trí tương quan giữa các tuyến đường trên như thế nào?


Hình 4.13

1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

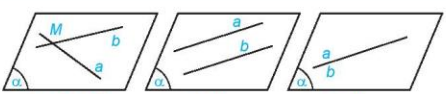
HĐ1. Quan sát bốn tuyến đường trong Hình 4.13 và trả lời các câu hỏi sau:

a) Hai tuyến đường nào giao nhau?

b) Hai tuyến đường nào không giao nhau?

c) Hai tuyến đường nào song song?

Cho hai đường thẳng *a* và *b* trong không gian.
- Nếu *a* và *b* cùng nằm trong một mặt phẳng thì ta nói *a* và *b* đồng phẳng. Khi đó, *a* và *b* có thể cắt nhau, song song với nhau hoặc trùng nhau.
- Nếu *a* và *b* không cùng nằm trong bất kì mặt phẳng nào thì ta nói *a* và *b* chéo nhau. Khi đó, ta cũng nói *a* chéo với *b*, hoặc *b* chéo với *a*.

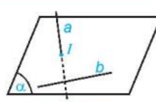


$a \cap b = \{M\}$
a cắt *b* tại *M*

$a \,//\, b$
a song song với *b*

$a \equiv b$
a trùng với *b*

Hình 4.14



Hình 4.15

Hãy tìm một số hình ảnh về hai đường thẳng song song, hai đường thẳng chéo nhau trong thực tiễn.

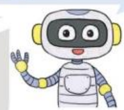

Dệt vải bằng khung cửi, một trong những nét đẹp văn hoá của một số dân tộc.


Hành lang với bộ cảm biến an ninh gồm các tia laze đôi một không cắt nhau.

Nhận xét

– Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng đồng phẳng và không có điểm chung.

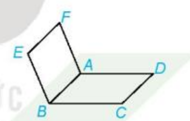
– Có đúng một mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song.



Ví dụ 1. Cho hai hình bình hành *ABCD* và *ABEF* không cùng nằm trong một mặt phẳng (H.4.16).

a) Quan sát bốn đường thẳng *AB, BC, CD, DA*. Chỉ ra các cặp đường thẳng cắt nhau, các cặp đường thẳng song song.

b) Trong ba đường thẳng *AB, AF, BE* có hai đường thẳng nào chéo nhau hay không?



Hình 4.16

Giải

a) Các cặp đường thẳng cắt nhau là *AB* và *BC*, *AB* và *DA*, *BC* và *CD*, *CD* và *DA*.

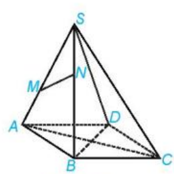
Các cặp đường thẳng song song là *AB* và *CD*, *DA* và *BC*.

b) Các đường thẳng *AB, AF, BE* cùng nằm trong mặt phẳng (*ABEF*) nên trong ba đường thẳng đó không có hai đường thẳng nào chéo nhau.

Luyện tập 1. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình bình hành (H.4.17).

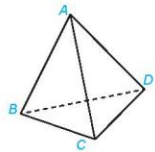
a) Trong các đường thẳng *AB, AC, CD*, hai đường thẳng nào song song, hai đường thẳng nào cắt nhau?

b) Gọi *M, N* lần lượt là hai điểm thuộc hai cạnh *SA, SB*. Trong các đường thẳng *SA, MN, AB* có hai đường thẳng nào chéo nhau hay không?



Hình 4.17

Ví dụ 2. Cho hình tứ diện $ABCD$ (H.4.18). Hai đường thẳng AB và CD có chéo nhau hay không? Chỉ ra các cặp đường thẳng chéo nhau có trong hình tứ diện đó.



Hình 4.18

Giải

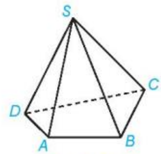
Nếu hai đường thẳng AB và CD không chéo nhau thì chúng cùng thuộc một mặt phẳng. Khi đó bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng, trái với giả thiết $ABCD$ là hình tứ diện. Do đó, hai đường thẳng AB và CD chéo nhau.

Lập luận tương tự, ta thấy trong tứ diện $ABCD$ còn có các cặp đường thẳng chéo nhau là AC và BD, AD và BC.

Luyện tập 2. Trong hình chóp tứ giác $S.ABCD$ (H.4.19), chỉ ra những đường thẳng:

a) Chéo với đường thẳng SA;

b) Chéo với đường thẳng BC.



Hình 4.19

Vận dụng 1. Một chiếc gậy được đặt một đầu dựa vào tường và đầu kia trên mặt sàn (H.4.20). Hỏi có thể đặt chiếc gậy đó song song với một trong các mép tường hay không?

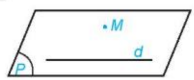
Hình 4.20

2. TÍNH CHẤT CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

HĐ2. Trong không gian, cho một đường thẳng d và một điểm M không nằm trên d (H.4.21). Gọi (P) là mặt phẳng chứa M và d.

a) Trên mặt phẳng (P) có bao nhiêu đường thẳng đi qua M và song song với d?

b) Nếu một đường thẳng đi qua M và song song với d thì đường thẳng đó có thuộc mặt phẳng (P) hay không?



Hình 4.21

Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có đúng một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

HĐ3. Quan sát lớp học và tìm hai đường thẳng song song với mép trên của bảng. Hai đường thẳng đó có song song với nhau hay không?

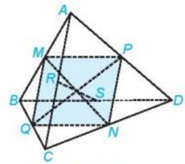
Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Các tia sáng Mặt Trời ở gần Trái Đất được coi như các đường thẳng đôi một song song với nhau.

Ví dụ 3. Cho tứ diện *ABCD*. Gọi *M, N, P, Q, R, S* lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng *AB, CD, AD, BC, AC, BD* (H.4.22).

a) Chứng minh rằng tứ giác *MPNQ* là hình bình hành.

b) Chứng minh rằng các đoạn thẳng *MN, PQ, RS* cùng đi qua trung điểm của mỗi đoạn.



Hình 4.22

Giải

a) Trong tam giác *ABC*, ta có *MQ* là đường trung bình nên $MQ // AC$ và $MQ = \frac{1}{2}AC$. Tương tự với tam giác *ACD*, ta có $PN // AC$ và $PN = \frac{1}{2}AC$. Do đó $MQ // PN$ và $MQ = PN$, suy ra tứ giác *MPNQ* là hình bình hành.

b) Từ câu a suy ra hai đoạn thẳng *MN* và *PQ* cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn. Tương tự, hai đoạn thẳng *MN* và *RS* cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn. Do đó, các đoạn thẳng *MN, PQ, RS* cùng đi qua trung điểm của mỗi đoạn.

Nêu các dấu hiệu nhận biết tứ giác là hình bình hành.

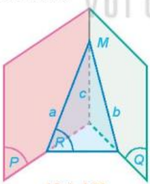
Luyện tập 3. Trong Ví dụ 1, chứng minh rằng bốn điểm *C, D, E, F* đồng phẳng và tứ giác *CDFE* là hình bình hành.

HĐ4. Cho hai mặt phẳng (*P*) và (*Q*) cắt nhau theo giao tuyến *c*. Một mặt phẳng (*R*) cắt (*P*) và (*Q*) lần lượt theo các giao tuyến *a* và *b* khác *c*.

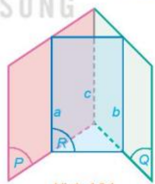
a) Nếu hai đường thẳng *a* và *c* cắt nhau tại *M* thì đường thẳng *b* có đi qua *M* hay không (H.4.23)? Giải thích vì sao.

b) Nếu hai đường thẳng *a* và *c* song song với nhau thì hai đường thẳng *b* và *c* có song song với nhau hay không (H.4.24)? Giải thích vì sao.

Nếu hai đường thẳng *b* và *c* cắt nhau tại *N* thì ta có thể sử dụng lại kết quả ở câu a.



Hình 4.23



Hình 4.24

Kết quả sau đây còn được biết đến với tên gọi "Định lí về ba đường giao tuyến".

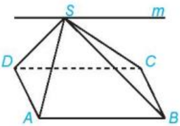
> Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

Chú ý. Từ kết quả trên có thể suy ra rằng: Nếu hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song với nhau thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành (H.4.25). Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Giải

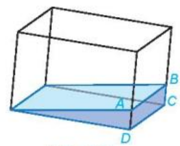
Hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) có điểm chung S và chứa hai đường thẳng song song là AB và CD. Do đó, giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng m đi qua S và song song với AB, CD.



Hình 4.25

Luyện tập 4. Trong Ví dụ 4, hãy xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Vận dụng 2. Một bể kính chứa nước có đáy là hình chữ nhật được đặt nghiêng như Hình 4.26. Giải thích tại sao đường mép nước AB song song với cạnh CD của bể nước.



Hình 4.26

BÀI TẬP

4.9. Trong không gian, cho ba đường thẳng a, b, c. Những mệnh đề nào sau đây là đúng?

a) Nếu a và b không cắt nhau thì a và b song song.

b) Nếu b và c chéo nhau thì b và c không cùng thuộc một mặt phẳng.

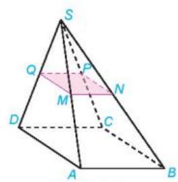
c) Nếu a và b cùng song song với c thì a song song với b.

d) Nếu a và b cắt nhau, b và c cắt nhau thì a và c cắt nhau.

4.10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Trong các cặp đường thẳng sau, cặp đường thẳng nào cắt nhau, cặp đường thẳng nào song song, cặp đường thẳng nào chéo nhau?

a) AB và CD; b) AC và BD; c) SB và CD.

4.11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA, SB, SC, SD (H.4.27). Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.



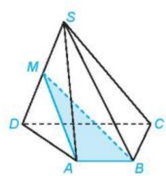
Hình 4.27

4.12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB. Chứng minh rằng tứ giác $MNCD$ là hình thang.

4.13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SD (H.4.28).

a) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MAB) và (SCD).

b) Gọi N là giao điểm của đường thẳng SC và mặt phẳng (MAB). Chứng minh rằng MN là đường trung bình của tam giác SCD.

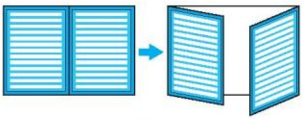


Hình 4.28

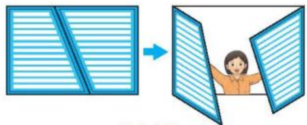
4.14. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD và P là một điểm thuộc cạnh AC. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (BPD) và chứng minh giao tuyến đó song song với BD.

4.15. (Đố vui) Khi hai cánh cửa sổ hình chữ nhật được mở, dù ở vị trí nào, thì hai mép ngoài của chúng luôn song song với nhau (H.4.29). Hãy giải thích tại sao.

Nếu hai cánh cửa sổ có dạng hình thang như Hình 4.30 thì có vị trí nào của hai cánh cửa để hai mép ngoài của chúng song song với nhau hay không?



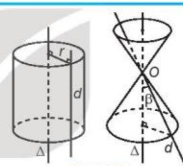
Hình 4.29



Hình 4.30

Em có biết?

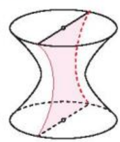
Trong không gian, cố định một đường thẳng Δ thẳng đứng và gọi d là một đường thẳng tuỳ ý. Ta hãy cùng tìm hiểu hình được tạo bởi đường thẳng d khi quay đường thẳng này quanh đường thẳng Δ trong không gian. Nếu d song song với Δ hoặc d cắt Δ thì có thể dễ dàng hình dung được hình tạo ra là mặt trụ hoặc mặt nón (H.4.31).



Hình 4.31

Còn nếu d và Δ chéo nhau thì sao? Trong hầu hết các trường hợp, hình tạo ra được gọi là mặt hypebol (hyperboloid) như trong Hình 4.32. Mặt hypebol có thể được coi như một "dạng 3D" của đường hypebol đã được dạy ở lớp 10. Một điều thú vị là nếu mặt hypebol được cắt bởi một mặt phẳng đi qua đường thẳng Δ (trục hypebol) thì vết cắt nhận được chính là một đường hypebol (H.4.33).

Hình 4.32



Hình 4.33

Hình ảnh của mặt hypebol xuất hiện rất nhiều trong xây dựng, kiến trúc, nghệ thuật,... và trong thực tiễn, chúng ta hoàn toàn có thể "dựng được" mặt hypebol bằng cách sử dụng các vật dụng đơn giản như nan tre thẳng, que tính hay những chiếc đũa... Em có thể tìm thấy một cách dựng như vậy trên các trang web tìm kiếm với từ khoá "hyperboloid".

Bài 12 ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

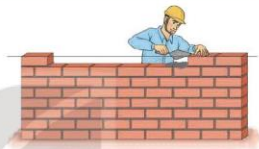
THUẬT NGỮ

- Đường thẳng song song với mặt phẳng
- Đường thẳng cắt mặt phẳng

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết đường thẳng song song với mặt phẳng.
- Giải thích điều kiện để đường thẳng song song với mặt phẳng.
- Giải thích tính chất cơ bản về đường thẳng song song với mặt phẳng.
- Mô tả một số hình ảnh trong thực tiễn có liên quan đến đường thẳng song song với mặt phẳng.

Khi xây tường gạch, người thợ thường bắt đầu với việc xây các viên gạch dẫn, sau đó căng dây nhợ dọc theo cạnh của các viên gạch dẫn đó để làm chuẩn rồi mới xây các viên gạch tiếp theo. Việc sử dụng dây căng như vậy có tác dụng gì? Toán học mô tả vị trí giữa dây căng, các mép gạch với mặt đất như thế nào?



1. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

HĐ1. Quan sát hình ảnh khung thành bóng đá và nhận xét vị trí của xà ngang, cột dọc, thanh chống và thanh bên của khung thành với mặt đất.

Kích thước của khung thành được quy định khác nhau tuỳ theo sân bóng. Trong sân bóng đá mini 5 người, xà ngang của khung thành dài 3 mét, cột dọc dài 2 mét.

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α). Nếu d và (α) không có điểm chung thì ta nói d song song với (α) hay (α) song song với d và kí hiệu là $d \,//\, (\alpha)$ hay $(\alpha) \,//\, d$.

Ngoài ra:

- Nếu d và (α) có một điểm chung duy nhất M thì ta nói d và (α) cắt nhau tại điểm M và kí hiệu $d \cap (\alpha) = \{M\}$ hay $d \cap (\alpha) = M$.
- Nếu d và (α) có nhiều hơn một điểm chung thì ta nói d nằm trong (α) hay (α) chứa d và kí hiệu $d \subset (\alpha)$ hay $(\alpha) \supset d$.

$d \,//\, (\alpha)$ $\quad$ $d \cap (\alpha) = \{M\}$ $\quad$ $d \subset (\alpha)$

Hãy chỉ ra một hình ảnh đường thẳng song song với mặt phẳng trong bức ảnh bên (H.4.34).

Hình 4.34. Cầu Long Biên, cây cầu được mệnh danh là "chứng nhân lịch sử" của nước ta.

Ví dụ 1. Cho hình tứ diện $ABCD$ (H.4.35). Trong các mặt phẳng chứa các mặt của hình tứ diện, hãy cho biết:

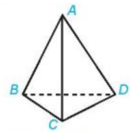
a) Đường thẳng AB cắt các mặt phẳng nào;

b) Đường thẳng AB nằm trong các mặt phẳng nào.

Giải

a) Đường thẳng AB cắt các mặt phẳng (ACD) và (BCD).

b) Đường thẳng AB nằm trong các mặt phẳng (ABC) và (ABD).



Hình 4.35

Luyện tập 1. Trong Ví dụ 1, đường thẳng AC cắt các mặt phẳng nào, nằm trong các mặt phẳng nào?

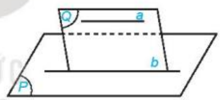
2. ĐIỀU KIỆN VÀ TÍNH CHẤT CỦA ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

HĐ2. Cho đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và a song song với đường thẳng b nằm trong (P). Gọi (Q) là mặt phẳng chứa a và b (H.4.36).

Nếu a và (P) cắt nhau tại điểm M thì M có thuộc (Q) và M có thuộc b hay không? Hãy rút ra kết luận sau khi trả lời các câu hỏi trên.

Ở Bài 11, ta đã biết có đúng một mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song.

> Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng nằm trong (P) thì a song song với (P).



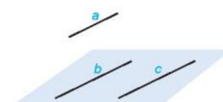
Hình 4.36

Phát biểu trên còn đúng không nếu bỏ điều kiện "a không nằm trong mặt phẳng (P)"?

Ví dụ 2. Cho ba đường thẳng a, b, c đôi một song song với nhau và không cùng nằm trong một mặt phẳng (H.4.37). Chứng minh rằng đường thẳng a song song với mp(b, c).

Giải

Ba đường thẳng a, b, c không cùng nằm trong một mặt phẳng nên đường thẳng a không nằm trong mp(b, c). Vì đường thẳng a song song với đường thẳng b và đường thẳng b nằm trong mp(b, c) nên đường thẳng a song song với mặt phẳng mp(b, c).



Hình 4.37

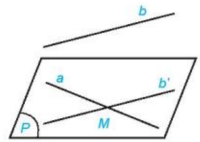
Luyện tập 2. Trong Ví dụ 2, chứng minh rằng đường thẳng c song song với mp(a, b), đường thẳng b song song với mp(a, c).

Ví dụ 3. Trong không gian cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Chứng minh rằng có một mặt phẳng chứa a và song song với b.

Giải (H.4.38)

Lấy điểm M bất kì thuộc a. Qua M kẻ đường thẳng b' song song với b và đặt $(P) = \text{mp}(a, b')$.

Vì a và b chéo nhau nên đường thẳng b không nằm trong mặt phẳng (P). Vì b song song với b' nằm trong mặt phẳng (P) nên b song song với (P). Vậy (P) là mặt phẳng chứa a và song song với b.



Hình 4.38

Chú ý. Ta có thể chứng minh rằng mặt phẳng (P) trong Ví dụ 3 là mặt phẳng duy nhất chứa đường thẳng a và song song với đường thẳng b. Như vậy, cho trước hai đường thẳng chéo nhau, có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

Luyện tập 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang ($AB \parallel CD$). Hai đường thẳng SD và AB có chéo nhau hay không? Chỉ ra mặt phẳng chứa đường thẳng SD và song song với AB.

Vận dụng. Trong *tình huống mở đầu*, hãy giải thích tại sao dây nhợ khi căng thì song song với mặt đất. Tác dụng của việc đó là gì?

HĐ3. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) và (Q) là một mặt phẳng chứa a. Giả sử (Q) cắt (P) theo giao tuyến b (H.4.36).

a) Hai đường thẳng a và b có thể chéo nhau không?

b) Hai đường thẳng a và b có thể cắt nhau không?

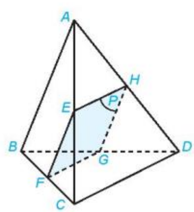
Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Nếu mặt phẳng (Q) chứa a và cắt (P) theo giao tuyến b thì b song song với a.

Ví dụ 4. Cho tứ diện $ABCD$, điểm E nằm giữa hai điểm A và C. Gọi (P) là mặt phẳng qua E và song song với hai đường thẳng AB, CD (H.4.39). Xác định các giao tuyến của (P) và các mặt của tứ diện. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?

Giải

Mặt phẳng (ABC) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ABC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AB. Vẽ $EF \parallel AB$ (F thuộc BC) thì EF là giao tuyến của (P) và (ABC).

Hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) cùng chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên chúng cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD. Vẽ EH, FG song song với CD (H thuộc AD, G thuộc BD) thì EH, FG lần lượt là giao tuyến của mặt phẳng (P) với hai mặt phẳng (ACD), (BCD). Khi đó GH là giao tuyến của (P) và (ABD).



Hình 4.39

Mặt phẳng (ABD) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên giao tuyến GH của (ABD) và (P) song song với AB. Tứ giác $EFGH$ có $EF \parallel GH$ (vì cùng song song với AB) và $EH \parallel FG$ (vì cùng song song với CD) nên nó là hình bình hành.

Luyện tập 4. Trong Ví dụ 4, gọi (Q) là mặt phẳng qua E và song song với hai đường thẳng AB, AD. Xác định giao tuyến của (Q) với các mặt của tứ diện.

BÀI TẬP

4.16. Trong không gian, cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P). Những mệnh đề nào sau đây là đúng?

a) Nếu a và (P) có điểm chung thì a không song song với (P).

b) Nếu a và (P) có điểm chung thì a và (P) cắt nhau.

c) Nếu a song song với b và b nằm trong (P) thì a song song với (P).

d) Nếu a và b song song với (P) thì a song song với b.

4.17. Cho hai tam giác ABC và ABD không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AD.

a) Đường thẳng AM có song song với mặt phẳng (BCD) hay không? Hãy giải thích tại sao.

b) Đường thẳng MN có song song với mặt phẳng (BCD) hay không? Hãy giải thích tại sao.

4.18. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh BC, CD. Chứng minh rằng đường thẳng BD song song với mặt phẳng (AMN).

4.19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi E là một điểm nằm giữa S và A. Gọi (P) là mặt phẳng qua E và song song với hai đường thẳng AB, AD. Xác định giao tuyến của (P) và các mặt bên của hình chóp. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?

4.20. Bạn Nam quan sát thấy dù cửa ra vào được mở ở vị trí nào thì mép trên của cửa luôn song song với một mặt phẳng cố định. Hãy cho biết đó là mặt phẳng nào và giải thích tại sao.

Bài 13 HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

THUẬT NGỮ
- Hai mặt phẳng song song
- Định lí Thalès trong không gian
- Hình lăng trụ
- Hình hộp

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Nhận biết hai mặt phẳng song song trong không gian.
- Giải thích điều kiện để hai mặt phẳng song song.
- Giải thích tính chất cơ bản về hai mặt phẳng song song.
- Giải thích định lí Thalès trong không gian.
- Giải thích tính chất cơ bản của hình lăng trụ và hình hộp.
- Mô tả một số hình ảnh trong thực tiễn có liên quan đến hai mặt phẳng song song trong không gian.

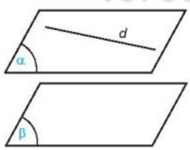
Các đầu bếp chuyên nghiệp luôn có kĩ năng dùng dao điêu luyện để thái thức ăn như rau, củ, thịt, cá,... thành các miếng đều nhau và đẹp mắt. Các nhát cắt cần tuân thủ nguyên tắc gì để đạt được điều đó?

1. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

HĐ1. Các mặt bậc thang trong Hình 4.40 gợi nên hình ảnh về các mặt phẳng không có điểm chung. Hãy tìm thêm một số ví dụ khác cũng gợi nên hình ảnh đó.

Hình 4.40

Hai mặt phẳng (α) và (β) được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung, kí hiệu $(\alpha) // (\beta)$ hay $(\beta) // (\alpha)$.



Ruộng bậc thang có các mặt bậc thang gợi nên hình ảnh về các mặt phẳng song song.

Nhận xét. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau và đường thẳng d nằm trong (α) thì d và (β) không có điểm chung, tức là d song song với (β). Như vậy, nếu một đường thẳng nằm trong một trong hai mặt phẳng song song thì đường thẳng đó song song với mặt phẳng còn lại.

? Trong hình ảnh mở đầu, các nhát cắt có tạo thành các mặt phẳng song song hay không?

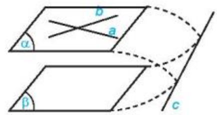
Tháp nghiêng Pisa ở Ý có các mặt sàn ở mỗi tầng không song song với mặt đất.

2. ĐIỀU KIỆN VÀ TÍNH CHẤT CỦA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

HĐ2. Cho mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau *a*, *b* và *a*, *b* cùng song song với mặt phẳng (β) (H.4.41).

Nếu (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến *c* thì hai đường thẳng *a* và *c* có song song với nhau hay không, hai đường thẳng *b* và *c* có song song với nhau hay không?

Hãy rút ra kết luận sau khi trả lời các câu hỏi trên.



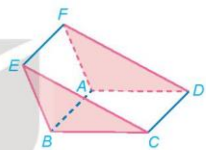
Hình 4.41

Hãy nhắc lại các tính chất của đường thẳng song song với mặt phẳng đã được học ở Bài 12.

> Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau và hai đường thẳng này song song với mặt phẳng (β) thì (α) và (β) song song với nhau.

? Nếu không có điều kiện "hai đường thẳng cắt nhau" thì khẳng định trên còn đúng không?

Ví dụ 1. Cho hai hình bình hành *ABCD* và *ABEF* không cùng nằm trong một mặt phẳng. Chứng minh rằng mặt phẳng (*BCE*) song song với mặt phẳng (*ADF*) (H.4.42).



Hình 4.42

Giải

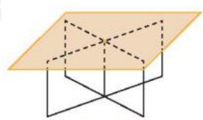
Vì tứ giác *ABCD* là hình bình hành nên *BC* // *AD*, suy ra *BC* // (*ADF*).

Vì tứ giác *ABEF* là hình bình hành nên *BE* // *AF*, suy ra *BE* // (*ADF*).

Mặt phẳng (*BCE*) chứa hai đường thẳng cắt nhau *BC* và *BE* cùng song song với mặt phẳng (*ADF*) nên mặt phẳng (*BCE*) song song với mặt phẳng (*ADF*).

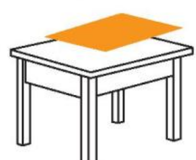
Luyện tập 1. Trong không gian, cho bốn điểm *A*, *B*, *C*, *D* không đồng phẳng. Qua điểm *A* vẽ hai đường thẳng *m*, *n* lần lượt song song với hai đường thẳng *BC*, *BD*. Chứng minh rằng mp(*m*, *n*) song song với mặt phẳng (*BCD*).

Vận dụng 1. Một chiếc bàn có phần chân là hai khung sắt hình chữ nhật có thể xoay quanh một trục như trong Hình 4.43. Khi mặt bàn được đặt lên phần chân bàn thì mặt bàn luôn song song với mặt đất. Hãy giải thích tại sao.



Hình 4.43

HĐ3. Đặt một tấm bìa cứng lên một góc của mặt bàn nằm ngang (H.4.44) sao cho mặt bìa song song với mặt đất. Khi đó mặt bìa có trùng với mặt bàn hay không?



Hình 4.44

> Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

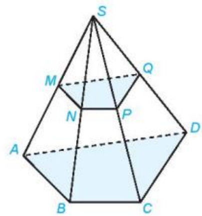
? Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì hai mặt phẳng đó có song song với nhau hay không? Vì sao?

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD (H.4.45). Chứng minh rằng hai mặt phẳng (MNP) và (NPQ) cùng song song với mặt phẳng $(ABCD)$, từ đó suy ra bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng.

Giải

Vì M, N là trung điểm của SA, SB nên MN là đường trung bình của tam giác SAB. Do đó, $MN // AB$ và suy ra MN song song với mặt phẳng $(ABCD)$. Tương tự, NP cũng song song với mặt phẳng $(ABCD)$. Vậy mặt phẳng (MNP) song song với mặt phẳng $(ABCD)$. Lập luận tương tự ta có mặt phẳng (NPQ) cũng song song với mặt phẳng $(ABCD)$.

Hai mặt phẳng (MNP) và (NPQ) cùng đi qua điểm N và cùng song song với mặt phẳng $(ABCD)$ nên hai mặt phẳng đó trùng nhau, tức là bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng.



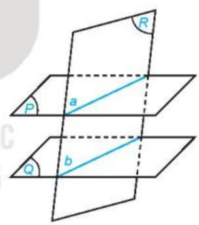
Hình 4.45

Luyện tập 2. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm thuộc các cạnh SA, SB, SC, SD sao cho $\frac{MA}{MS}=\frac{NB}{NS}=\frac{PC}{PS}=\frac{QD}{QS}=\frac{1}{2}$. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng.

HĐ4. Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Giả sử mặt phẳng (R) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến a (H.4.46).

a) Chứng minh rằng mặt phẳng (R) cắt mặt phẳng (Q).

b) Gọi b là giao tuyến của hai mặt phẳng (R) và (Q). Hai đường thẳng a và b có thể chéo nhau hay không, có thể cắt nhau hay không?



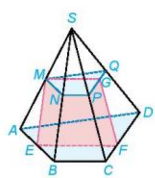
Hình 4.46

Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.

Ví dụ 3. Trong Ví dụ 2, gọi E, F lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AB, CD (H. 4.47). Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MEF) và mặt phẳng $(MNPQ)$.

Giải

Trong Ví dụ 2, ta đã chứng minh được hai mặt phẳng $(MNPQ)$ và $(ABCD)$ song song với nhau. Vì vậy hai giao tuyến của mặt phẳng (MEF) với hai mặt phẳng $(MNPQ)$ và $(ABCD)$ song song với nhau. Trong mặt phẳng (MEF), qua M vẽ đường thẳng song song với EF cắt PQ tại G thì đường thẳng MG là giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và $(MNPQ)$.



Hình 4.47

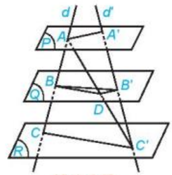
Luyện tập 3. Trong Ví dụ 3, hãy xác định giao tuyến của mặt phẳng (EMQ) và mặt phẳng $(ABCD)$.

3. ĐỊNH LÍ THALÈS TRONG KHÔNG GIAN

HĐ5. Cho ba mặt phẳng (P), (Q) và (R) đôi một song song. Hai đường thẳng phân biệt d và d' cắt ba mặt phẳng lần lượt tại A, B, C và A', B', C' (C khác C'). Gọi D là giao điểm của AC' và (Q) (H.4.48).

a) Các cặp đường thẳng BD và CC', $B'D$ và AA' có song song với nhau không?

b) Các tỉ số $\frac{AB}{BC}, \frac{AD}{DC'}$ và $\frac{A'B'}{B'C'}$ có bằng nhau không?



Hình 4.48

Kết quả sau còn được biết đến như định lí Thalès trong không gian.

> Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến phân biệt bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Trong Hình 4.48 ta có $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$.

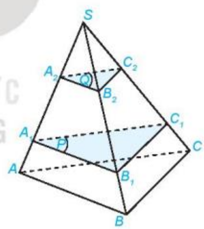
Ví dụ 4. Cho hình tứ diện $SABC$. Trên cạnh SA lấy các điểm A_1, A_2 sao cho $A_2A_1 = 2A_1A$. Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) và lần lượt đi qua A_1, A_2. Mặt phẳng (P) cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại B_1, C_1. Mặt phẳng (Q) cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại B_2, C_2 (H.4.49). Chứng minh $B_2B_1 = 2B_1B$ và $C_2C_1 = 2C_1C$.

Giải

Áp dụng định lí Thalès cho ba mặt phẳng đôi một song song (P), (Q), (ABC) và hai cát tuyến SA, SB, ta có $\frac{A_2A_1}{A_1A} = \frac{B_2B_1}{B_1B}$.

Vì $A_2A_1 = 2A_1A$ nên $B_2B_1 = 2B_1B$.

Tương tự với hai cát tuyến SA, SC suy ra $C_2C_1 = 2C_1C$.



Hình 4.49

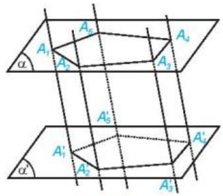
Luyện tập 4. Trong HĐ5, cho $AB = 2$ cm, $BC = 4$ cm và $A'B' = 3$ cm. Tính độ dài của đoạn thẳng $B'C'$.

4. HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP

HĐ6. Các hình ảnh dưới đây có đặc điểm chung nào với hình lăng trụ đứng tam giác mà em đã học ở lớp 7?


Cho hai mặt phẳng song song (α) và (α'). Trên (α) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Qua các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ vẽ các đường thẳng đôi một song song và cắt mặt phẳng (α') tại $A'_1, A'_2, ..., A'_n$. Hình gồm hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $A'_1A'_2...A'_n$ và các tứ giác $A_1A'_1A'_2A_2$, $A_2A'_2A'_3A_3$, ..., $A_nA'_nA'_1A_1$ được gọi là hình lăng trụ và kí hiệu là $A_1A_2...A_n.A'_1A'_2...A'_n$ (H.4.50).

- Các điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ và $A'_1, A'_2, ..., A'_n$ được gọi là các *đỉnh*, các đoạn thẳng $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, ..., $A_nA'_n$ được gọi là các *cạnh bên*, các đoạn thẳng A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 và $A'_1A'_2$, $A'_2A'_3$, ..., $A'_nA'_1$ được gọi là các *cạnh đáy* của hình lăng trụ.
- Hai đa giác $A_1A_2...A_n$ và $A'_1A'_2...A'_n$ được gọi là hai *mặt đáy* của hình lăng trụ.
- Các tứ giác $A_1A'_1A'_2A_2$, $A_2A'_2A'_3A_3$, ..., $A_nA'_nA'_1A_1$ được gọi là các *mặt bên* của hình lăng trụ.



Hình 4.50

Hình lăng trụ có đáy là tam giác được gọi là hình lăng trụ tam giác, hình lăng trụ có đáy là tứ giác được gọi là hình lăng trụ tứ giác.

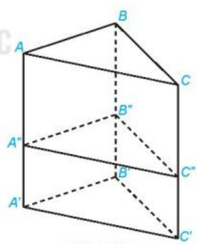
? Hãy giải thích tại sao các mặt bên của hình lăng trụ là hình bình hành, từ đó suy ra các cạnh bên đôi một song song và có độ dài bằng nhau.

Chú ý. Tên của hình lăng trụ được gọi dựa theo tên của đa giác đáy.

Ví dụ 5. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Một mặt phẳng song song với mặt đáy của hình lăng trụ cắt các cạnh bên của hình lăng trụ lần lượt tại A'', B'', C'' (H.4.51). Chứng minh rằng $ABC.A''B''C''$ là hình lăng trụ.

Giải

Vì các cạnh bên của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đôi một song song nên AA'', BB'', CC'' đôi một song song. Mặt phẳng (ABC) song song với mặt phẳng $(A''B''C'')$ nên $ABC.A''B''C''$ là hình lăng trụ.



Hình 4.51

Luyện tập 5. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M và M' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$. Chứng minh rằng $AMC.A'M'C'$ là hình lăng trụ.

HĐ7. Hình ảnh nào trong HĐ6 gợi nên hình ảnh về hình lăng trụ có đáy là hình bình hành?

Hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ có hai đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp.

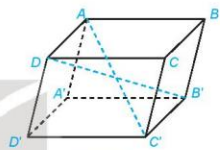
- Các cặp điểm A và C', B và D', C và A', D và B' được gọi là các đỉnh đối diện của hình hộp.
- Các đoạn thẳng AC', BD', CA' và DB' được gọi là các đường chéo của hình hộp.
- Các cặp tứ giác $ABCD$ và $A'B'C'D$, $ADD'A'$ và $BCC'B'$, $ABB'A'$ và $CDD'C'$ được gọi là hai mặt đối diện của hình hộp.

Hai đỉnh đối diện của hình hộp là hai đỉnh không cùng thuộc bất kì mặt nào của hình hộp. Hai mặt đối diện của hình hộp là hai mặt không có điểm chung.

Ví dụ 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (H.4.52). Chứng minh rằng các đường chéo AC', BD', CA' và DB' của hình hộp cùng đi qua trung điểm của mỗi đường.

Giải

Đáy $ABCD$ của hình hộp là hình bình hành nên $AD // BC$ và $AD = BC$. Mặt bên $BCC'B'$ của hình hộp là hình bình hành nên $BC // B'C'$ và $BC = B'C'$. Vậy $AD // B'C'$ và $AD = B'C'$, suy ra $ADC'B'$ là hình bình hành. Từ đó AC' và DB' cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Tương tự AC' và BD', AC' và CA' cũng cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Vậy bốn đường chéo của hình hộp cùng đi qua trung điểm của mỗi đường.



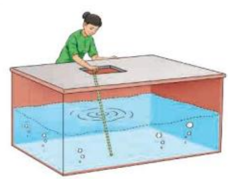
Hình 4.52

Luyện tập 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(BCC'B')$ song song với nhau.

Nhận xét. Từ Ví dụ 6 và Luyện tập 6, ta có:

- Các đường chéo của hình hộp cùng đi qua trung điểm của mỗi đường;
- Các mặt đối diện của hình hộp song song với nhau và có thể coi là hai đáy của hình hộp.

Vận dụng 2. Để xác định mực nước trong một chiếc bể có dạng hình hộp, bác Hà đặt một thanh gỗ đủ dài vào trong bể sao cho một đầu của thanh gỗ dựa vào mép của nắp bể, đầu còn lại nằm trên đáy bể (H.4.53). Sau đó bác Hà rút thanh gỗ ra ngoài và tính tỉ lệ giữa độ dài của phần thanh gỗ bị ngâm trong nước và độ dài của cả thanh gỗ. Tỉ lệ này chính bằng tỉ lệ giữa mực nước và chiều cao của bể. Hãy giải thích vì sao.


Hình 4.53

BÀI TẬP

4.21. Trong không gian cho ba mặt phẳng phân biệt (P), (Q), (R). Những mệnh đề nào sau đây là đúng?

a) Nếu (P) chứa một đường thẳng song song với (Q) thì (P) song song với (Q).

b) Nếu *(P)* chứa hai đường thẳng song song với *(Q)* thì *(P)* song song với *(Q)*.

c) Nếu *(P)* và *(Q)* song song với *(R)* thì *(P)* song song với *(Q)*.

d) Nếu *(P)* và *(Q)* cắt *(R)* thì *(P)* và *(Q)* song song với nhau.

4.22. Cho hình lăng trụ tam giác *ABC.A'B'C'*. Gọi *M, N, P* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AA', BB', CC'*. Chứng minh rằng mặt phẳng (*MNP*) song song với mặt phẳng (*ABC*).

4.23. Cho hình thang *ABCD* có hai đáy *AB* và *CD*. Qua các điểm *A, D* lần lượt vẽ các đường thẳng *m, n* song song với nhau và không nằm trong mặt phẳng (*ABCD*). Chứng minh rằng mp(*B, m*) và mp(*C, n*) song song với nhau.

4.24. Cho hình tứ diện *SABC*. Trên cạnh *SA* lấy các điểm A_1, A_2 sao cho $AA_1 = A_1A_2 = A_2S$. Gọi (*P*) và (*Q*) là hai mặt phẳng song song với mặt phẳng (*ABC*) và lần lượt đi qua A_1, A_2. Mặt phẳng (*P*) cắt các cạnh *SB, SC* lần lượt tại B_1, C_1. Mặt phẳng (*Q*) cắt các cạnh *SB, SC* lần lượt tại B_2, C_2. Chứng minh $BB_1 = B_1B_2 = B_2S$ và $CC_1 = C_1C_2 = C_2S$.

4.25. Cho hình lăng trụ tứ giác *ABCD.A'B'C'D'*. Một mặt phẳng song song với mặt phẳng (*A'B'C'D'*) cắt các cạnh bên của hình lăng trụ lần lượt tại *A", B", C", D"*. Hỏi hình tạo bởi các điểm *A, B, C, D, A", B", C", D"* là hình gì?

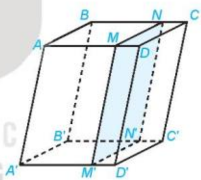
4.26. Cho hình lăng trụ tam giác *ABC.A'B'C'*. Gọi *G* và *G'* lần lượt là trọng tâm của hai tam giác *ABC* và *A'B'C'*.

a) Chứng minh rằng tứ giác *AGG'A'* là hình bình hành.

b) Chứng minh rằng *AGC.A'G'C'* là hình lăng trụ.

4.27. Cho hình hộp *ABCD.A'B'C'D'*. Một mặt phẳng song song với mặt bên (*ABB'A'*) của hình hộp và cắt các cạnh *AD, BC, A'D', B'C'* lần lượt tại *M, N, M', N'* (H.4.54).

Chứng minh rằng *ABNM.A'B'N'M'* là hình hộp.



Hình 4.54

4.28. Cầu thang xương cá là dạng cầu thang có hình dáng tương tự như những đốt xương cá, thường có những bậc cầu thang với khoảng mở lớn, tạo được sự nhẹ nhàng và thoáng đãng cho không gian sống. Trong Hình 4.55, phần mép của mỗi bậc thang nằm trên tường song song với nhau. Hãy giải thích tại sao.

Hình 4.55

Bài 14 PHÉP CHIẾU SONG SONG

THUẬT NGỮ
- Phép chiếu song song
- Hình chiếu
- Phương chiếu
- Hình biểu diễn

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Nhận biết khái niệm và tính chất cơ bản về phép chiếu song song.
- Xác định ảnh của một điểm, một đoạn thẳng, một tam giác, một đường tròn qua phép chiếu song song.
- Vẽ hình biểu diễn của một số hình khối đơn giản.
- Mô tả một số hình ảnh trong thực tiễn có liên quan đến phép chiếu song song.

Trong bóng đá, công nghệ Goal-line được sử dụng để xác định xem bóng đã hoàn toàn vượt qua vạch vôi hay chưa, từ đó giúp trọng tài đưa ra quyết định về một bàn thắng có được ghi hay không. Yếu tố hình học nào cho ta biết quả bóng đã vượt qua vạch vôi hay chưa?

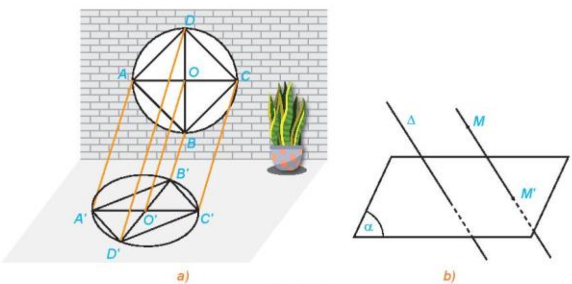
Một bàn thắng được ghi.

1. PHÉP CHIẾU SONG SONG

HĐ1. Một khung cửa sổ có dạng hình tròn với các chấn song tạo thành hình vuông *ABCD*, hai đường chéo của hình vuông cắt nhau tại *O*. Dưới ánh mặt trời, khung cửa và các chấn song đổ bóng lên sàn nhà (H.4.56a). Quan sát hình vẽ và trả lời các câu hỏi sau:

a) Các đường thẳng nối mỗi điểm *A*, *B*, *C* với bóng *A'*, *B'*, *C'* có đôi một song song hay không?

b) Làm thế nào để xác định được bóng đổ trên sàn nhà của mỗi điểm trên khung cửa sổ?



Hình 4.56

Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ cắt (α). Với mỗi điểm M trong không gian ta xác định điểm M' như sau:

- Nếu M thuộc Δ thì M' là giao điểm của (α) và Δ.
- Nếu M không thuộc Δ thì M' là giao điểm của (α) và đường thẳng qua M song song với Δ.

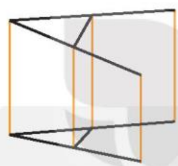
Điểm M' được gọi là hình chiếu song song của điểm M trên mặt phẳng (α) theo phương Δ.

Phép đặt tương ứng mỗi điểm M với hình chiếu M' của nó được gọi là phép chiếu song song lên (α) theo phương Δ.

Mặt phẳng (α) được gọi là mặt phẳng chiếu, phương Δ được gọi là phương chiếu.

Trong HĐ1, làm thế nào để xác định được bóng của toàn bộ song cửa CD trên sàn nhà?

Cho hình $\mathcal{H}$. Tập hợp $\mathcal{H}'$ các hình chiếu M' của các điểm M thuộc $\mathcal{H}$ qua phép chiếu song song được gọi là hình chiếu của $\mathcal{H}$ qua phép chiếu song song đó.



Hình chiếu của hình chữ "A"

Bóng đổ của người bán hàng rong dưới ánh mặt trời trên đường phố Hội An

Chú ý. Nếu một đường thẳng song song với phương chiếu thì hình chiếu của đường thẳng đó là một điểm. Kể từ đây, nếu không nói gì thêm ta chỉ xét các phép chiếu mà phương chiếu không song song với mặt phẳng chiếu.

Ví dụ 1. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$.

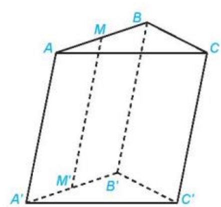
a) Xác định hình chiếu của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ theo phương CC'.

b) Gọi M là một điểm thuộc đoạn thẳng AB. Xác định hình chiếu của M trên mặt phẳng $(A'B'C')$ theo phương CC'.

Giải (H.4.57)

a) Vì $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ nên $AA' \parallel BB' \parallel CC'$. Vì A' thuộc mặt phẳng $(A'B'C')$ nên A' là hình chiếu của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ theo phương CC'.

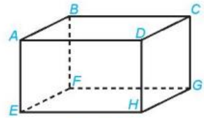
b) Trong mặt phẳng $(ABB'A')$ vẽ $MM' \parallel AA'$ với M' thuộc $A'B'$ thì $MM' \parallel CC'$. Vì M' thuộc mặt phẳng $(A'B'C')$ nên M' là hình chiếu của M trên mặt phẳng $(A'B'C')$ theo phương CC'.



Hình 4.57

Luyện tập 1. Cho hình hộp *ABCD.EFGH* (H.4.58). Xác định hình chiếu của điểm *A* trên mặt phẳng (*CDHG*) theo phương *BC* và theo phương *BG*.

Vận dụng 1. Trong *hình ảnh mở đầu*, khi một bàn thắng được ghi thì hình chiếu của quả bóng trên mặt đất theo phương thẳng đứng có vị trí như thế nào với vạch vôi?



Hình 4.58

2. TÍNH CHẤT CỦA PHÉP CHIẾU SONG SONG

HĐ2. Quan sát Hình 4.56a và trả lời các câu hỏi sau:

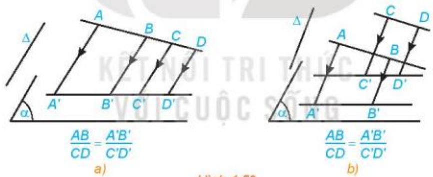
a) Hình chiếu *O'* của điểm *O* có nằm trên đoạn *A'C'* hay không?

b) Hình chiếu của hai song cửa *AB* và *CD* như thế nào với nhau?

c) Hình chiếu *O'* của điểm *O* có phải là trung điểm của đoạn *A'C'* hay không?

Ta có các tính chất sau của phép chiếu song song:

- Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó. Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, tia thành tia, đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.
- Phép chiếu song song giữ nguyên tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng cùng nằm trên một đường thẳng hoặc nằm trên hai đường thẳng song song.



Hình 4.59

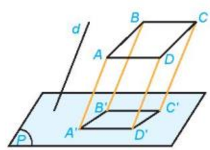
❓ Hình chiếu của hai đường thẳng cắt nhau có phải là hai đường thẳng cắt nhau hay không?

Ví dụ 2. Cho hình bình hành *ABCD* và gọi *A'B'C'D'* là hình chiếu của *ABCD* trên mặt phẳng (*P*) theo phương *d* (H.4.60). Chứng minh rằng tứ giác *A'B'C'D'* là hình bình hành.

Giải

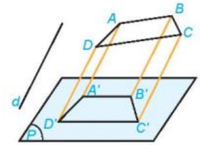
Vì *ABCD* là hình bình hành nên *AB* song song với *CD*, do đó hình chiếu của *AB* là *A'B'* song song với hình chiếu của *CD* là *C'D'*. Tương tự *A'D'* song song với *B'C'*.

Tứ giác *A'B'C'D'* có *A'B'* // *C'D'* và *A'D'* // *B'C'* nên nó là hình bình hành.



Hình 4.60

Luyện tập 2. Chứng minh rằng hình chiếu song song của một hình thang là một hình thang (H.4.61).

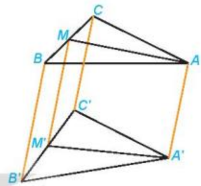


Hình 4.61

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC. Một phép chiếu song song biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$, biến M thành M'. Chứng minh rằng $A'M'$ là đường trung tuyến của tam giác $A'B'C'$ (H.4.62).

Giải

Vì M là trung điểm của BC nên B, M, C thẳng hàng theo thứ tự đó và $\frac{BM}{MC} = 1$. Do vậy B', M', C' thẳng hàng theo thứ tự đó và $\frac{B'M'}{M'C'} = 1$, tức là M' là trung điểm của $B'C'$. Vậy $A'M'$ là đường trung tuyến của tam giác $A'B'C'$.

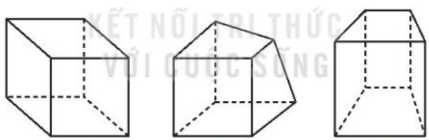


Hình 4.62

Luyện tập 3. Một phép chiếu song song biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng phép chiếu đó biến đường trung bình của tam giác ABC thành đường trung bình của tam giác $A'B'C'$.

3. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN

HĐ3. Trong ba hình dưới đây, hình nào thể hiện hình lập phương chính xác hơn?



Hình 4.63

Từ đầu chương, ta thường minh hoạ các hình tứ diện, hình lập phương, hình lăng trụ,... bằng các hình vẽ trên giấy. Các hình vẽ này đều tuân theo một nguyên tắc nhất định và chúng được gọi là hình biểu diễn của hình không gian trên mặt phẳng.

> **Hình biểu diễn** của một hình trong không gian là hình chiếu song song của hình đó trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

? Quan sát hình ảnh khung cửa sổ trong Hình 4.56a và cho biết hình biểu diễn của hình tam giác, hình vuông, hình tròn là hình gì?

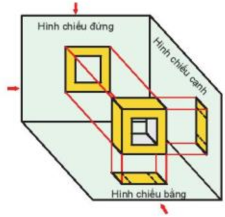
Khi hình phẳng nằm trong mặt phẳng không song song với phương chiếu thì hình biểu diễn của hình phẳng đó có các tính chất sau:

– Hình biểu diễn của một tam giác (cân, đều, vuông) là một tam giác;

– Hình biểu diễn của hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành là hình bình hành;

– Hình biểu diễn của hình thang $ABCD$ với AB // CD là một hình thang $A'B'C'D'$ với $A'B'$ // $C'D'$ thoả mãn $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$;

– Hình biểu diễn của hình tròn là hình elip.

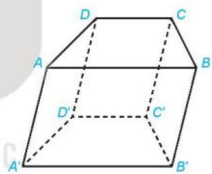


Hình chiếu bằng, hình chiếu đứng, hình chiếu cạnh của một vật thể (môn Công nghệ 8 và Công nghệ 10) chính là hình biểu diễn của vật thể đó.

Ví dụ 4. Vẽ hình biểu diễn của hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có mặt đáy $ABCD$ là hình thang, AB song song với CD và $AB = 2CD$.

Giải

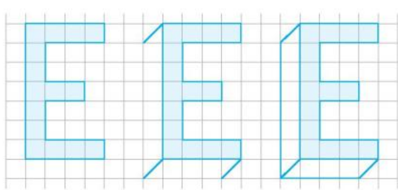
Hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có các mặt bên là hình bình hành nên hình biểu diễn của nó cũng có các mặt bên là hình bình hành. Hình thang $ABCD$ có hai đáy AB, CD và $AB = 2CD$ nên hình biểu diễn của $ABCD$ là một hình thang có độ dài một đáy gấp hai lần độ dài của đáy còn lại. Từ đó, ta vẽ được hình biểu diễn của hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ như Hình 4.64.



Hình 4.64

Luyện tập 4. Vẽ hình biểu diễn của hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

Vận dụng 2. Phép chiếu song song có thể được sử dụng để vẽ dạng nổi (hay dạng 3D) của chữ cái như trong hình dưới đây. Theo phương pháp đó hãy vẽ dạng nổi của một số chữ cái quen thuộc như L, N, T, ...



BÀI TẬP

4.29. Những mệnh đề nào trong các mệnh đề sau đây là đúng?

a) Phép chiếu song song biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

b) Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng cắt nhau.

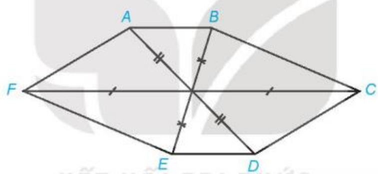
c) Phép chiếu song song biến tam giác đều thành tam giác cân.

d) Phép chiếu song song biến hình vuông thành hình bình hành.

4.30. Nếu tam giác $A'B'C'$ là hình chiếu của tam giác ABC qua một phép chiếu song song thì tam giác ABC có phải là hình chiếu của tam giác $A'B'C'$ qua một phép chiếu song song hay không? Giải thích vì sao.

4.31. Phép chiếu song song biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng phép chiếu đó biến trọng tâm của tam giác ABC thành trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.

4.32. Hình 4.65 có thể là hình biểu diễn của một hình lục giác đều hay không? Vì sao?

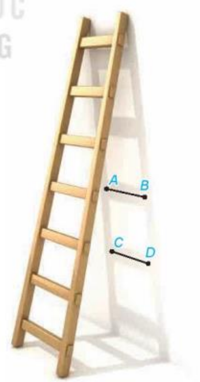


Hình 4.65

4.33. Vẽ hình biểu diễn của hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, AB song song với CD và $AB = 2$ cm, $CD = 6$ cm.

4.34. Trong hình bên, AB và CD là bóng của hai thanh chắn của một chiếc thang dưới ánh mặt trời.

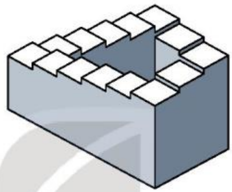
Hãy giải thích tại sao AB song song với CD.



Em có biết?

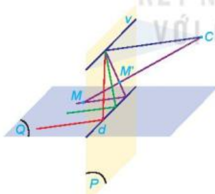
Phép chiếu song song được sử dụng chủ yếu trong các bản vẽ kĩ thuật vì phép chiếu này thể hiện đúng tỉ lệ kích thước trên vật thể. Tuy nhiên, phép chiếu song song không thể hiện đúng những gì mà mắt người quan sát được, ví dụ như phép chiếu song song không thể hiện đúng luật xa gần: đối với các vật thể có cùng kích thước, vật thể ở gần phải lớn hơn, vật thể ở xa phải nhỏ hơn. Vì vậy, trong nhiều trường hợp, phép chiếu song song không thể hiện đúng độ cao, độ sâu của đối tượng trong thực tế và tạo ra ảo giác cho người xem. Bằng cách khai thác những ảo giác này, Maurits Cornelis Escher và Roger Penrose đã đưa ra những hình ảnh về các "vật thể bất khả thi" (impossible objects) – các vật thể không tồn tại trong thực tế. "Thác nước Escher" và "Cầu thang Penrose" là hai ví dụ về các vật thể như vậy.

Thác nước Escher



Cầu thang Penrose

Để khắc phục những hạn chế của phép chiếu song song, người ta sử dụng phép chiếu xuyên tâm (hay phép chiếu phối cảnh) mà ở đó luật xa gần được đảm bảo. Phép chiếu xuyên tâm với tâm C lên mặt phẳng chiếu (P) (không đi qua C) cho tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' là giao điểm của CM và (P). Phép chiếu xuyên tâm biến đường thẳng thành đường thẳng.



Khi nhìn hai đường ray xe lửa ta có cảm giác chúng "cắt nhau ở xa vô tận"

Nếu (Q) là một mặt phẳng cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến d thì phép chiếu xuyên tâm biến các đường thẳng song song nằm trong mặt phẳng (Q) và không song song với d thành các đường thẳng đồng quy. Khi đó, điểm đồng quy nằm trên giao tuyến v của (P) và mặt phẳng qua C song song với (Q). Giao tuyến này còn được gọi là "đường thẳng vô tận" hay "đường chân trời" trong hội hoạ. Tính chất này của phép chiếu xuyên tâm giải thích tại sao khi vẽ phối cảnh, các đường thẳng song song trong thực tế và hướng về phía người vẽ lại có xu hướng cắt nhau tại một điểm ở "xa vô tận".

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

A – TRẮC NGHIỆM

4.35. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng a và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường thẳng b. Vị trí tương đối của hai đường thẳng a và b là

A. chéo nhau.

B. cắt nhau.

C. song song.

D. trùng nhau.

4.36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh SD. Đường thẳng SB song song với mặt phẳng

A. (CDM). B. (ACM). C. (ADM). D. (ACD).

4.37. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng

A. $(ABCD)$.

B. $(BCC'B')$.

C. (BDA').

D. (BDC').

4.38. Cho ba mặt phẳng (P), (Q), (R) đôi một song song với nhau. Đường thẳng a cắt các mặt phẳng (P), (Q), (R) lần lượt tại A, B, C sao cho $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ và đường thẳng b cắt các mặt phẳng (P), (Q), (R) lần lượt tại A', B', C'. Tỉ số $\frac{A'B'}{B'C'}$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{2}{5}$.

4.39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SD; K là giao điểm của mặt phẳng (AMN) và đường thẳng SC. Tỉ số $\frac{SK}{SC}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{2}{3}$.

4.40. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, $B'C'$. Hình chiếu của $\Delta B'DM$ qua phép chiếu song song trên $(A'B'C'D')$ theo phương chiếu AA' là

A. $\Delta B'A'M'$. B. $\Delta C'D'M'$. C. $\Delta DMM'$. D. $\Delta B'D'M'$.

B – TỰ LUẬN

4.41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AB \parallel CD$ và $AB < CD$. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng sau:

a) (SAD) và (SBC);

b) (SAB) và (SCD);

c) (SAC) và (SBD).

4.42. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và AA'.

a) Xác định giao điểm của mặt phẳng (MNP) với đường thẳng $B'C$.

b) Gọi K là giao điểm của mặt phẳng (MNP) với đường thẳng $B'C$. Tính tỉ số $\frac{KB'}{KC}$.

4.43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên cạnh SC và cạnh AB lần lượt lấy điểm M và N sao cho $CM = 2SM$ và $BN = 2AN$.

a) Xác định giao điểm K của mặt phẳng (ABM) với đường thẳng SD. Tính tỉ số $\frac{SK}{SD}$.

b) Chứng minh rằng $MN \parallel (SAD)$.

4.44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAD, SCD.

a) Chứng minh rằng $GK \parallel (ABCD)$.

b) Mặt phẳng chứa đường thẳng GK và song song với mặt phẳng $(ABCD)$ cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, E, F. Chứng minh rằng tứ giác $MNEF$ là hình bình hành.

4.45. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AD, $A'B'$.

Chứng minh rằng:

a) $BD \parallel B'D'$, $(A'BD) \parallel (CB'D')$ và $MN \parallel (BDD'B')$;

b) Đường thẳng AC' đi qua trọng tâm G của tam giác $A'BD$.

4.46. Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM = 3AM$. Mặt phẳng (P) đi qua M song song với hai đường thẳng AD và BC.

a) Xác định giao điểm K của mặt phẳng (P) với đường thẳng CD.

b) Tính tỉ số $\frac{KC}{CD}$.

CHƯƠNG V

GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

Chương này trình bày khái niệm giới hạn của dãy số, của hàm số và một số định lí, quy tắc tìm giới hạn. Chúng là cơ sở cho việc nghiên cứu các nội dung khác của Giải tích và cho phép giải quyết nhiều bài toán của khoa học và thực tiễn. Khái niệm hàm số liên tục và một vài tính chất đơn giản của chúng được trình bày ở phần cuối chương.

Bài 15 GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

THUẬT NGỮ

- Giới hạn của dãy số
- Các phép toán giới hạn
- Cấp số nhân lùi vô hạn
- Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết khái niệm giới hạn của dãy số.
- Giải thích một số giới hạn cơ bản.
- Vận dụng các phép toán giới hạn để tìm giới hạn của một số dãy số đơn giản.
- Tính tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn và vận dụng được kết quả đó để giải quyết một số tình huống thực tiễn giả định hoặc liên quan đến thực tiễn.

Nghịch lí Zeno. Achilles (A-sin, một nhân vật trong thần thoại Hy Lạp, được mô tả là có thể chạy nhanh như gió) đuổi theo một con rùa trên một đường thẳng. Vị trí xuất phát của Achilles là A_1, cách vị trí xuất phát R_1 của rùa một quãng đường có chiều dài là a (H.5.1). Zeno lí luận rằng, mặc dù chạy nhanh hơn nhưng Achilles không bao giờ đuổi kịp rùa.

Hình 5.1

Thật vậy, trước tiên Achilles phải đến được vị trí $A_2 = R_1$ và trong khoảng thời gian này, rùa đã di chuyển đến vị trí R_2. Sau đó, Achilles phải đến được vị trí $A_3 = R_2$, lúc này rùa đã di chuyển đến vị trí R_3,... Cứ như vậy, Achilles không bao giờ đuổi kịp rùa.

Zeno (490 – 429 trước Công nguyên) là một triết gia Hy Lạp, đến từ thành phố Elea (miền nam nước Ý ngày nay). Trong số các nghịch lí của Zeno, nghịch lí Achilles đuổi rùa được coi là đã thúc đẩy sự hình thành khái niệm giới hạn, một công cụ thiết yếu của toán học, được sử dụng để nghiên cứu các quá trình liên quan đến sự vô hạn.

1. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

HĐ1. Nhận biết dãy số có giới hạn là 0

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

a) Biểu diễn năm số hạng đầu của dãy số này trên trục số.

b) Bắt đầu từ số hạng nào của dãy, khoảng cách từ u_n đến 0 nhỏ hơn 0,01?

> Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Ví dụ 1. Xét dãy số $u_n = \frac{1}{n^2}$. Giải thích vì sao dãy số này có giới hạn là 0.

Giải

Dãy số này có giới hạn là 0, bởi vì $|u_n| = \frac{1}{n^2}$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý khi n đủ lớn.

Chẳng hạn, để $|u_n| < 0,0001$ tức là $\frac{1}{n^2} < 10^{-4}$, ta cần $n^2 > 10\,000$ hay $n > 100$. Như vậy, các số hạng của dãy kể từ số hạng thứ 101 đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 0,0001.

Chú ý. Từ định nghĩa dãy số có giới hạn 0, ta có các kết quả sau:

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ với k là một số nguyên dương;
- $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$;
- Nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi $n \ge 1$ và $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ thì $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Luyện tập 1. Chứng minh rằng $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n} = 0$.

HĐ2. Nhận biết dãy số có giới hạn hữu hạn

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$. Xét dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = u_n - 1$.

Tính $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

> Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là số thực a khi n dần tới dương vô cực nếu $\lim_{n\to+\infty} (u_n - a) = 0$, kí hiệu $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ hay $u_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

Ví dụ 2. Xét dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n+1}{n}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2.$

Giải

Ta có $u_n - 2 = \dfrac{2n+1}{n} - 2 = \dfrac{(2n+1)-2n}{n} = \dfrac{1}{n} \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Do vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2.$

Chú ý. Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = c.$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - a) = 0.$

Luyện tập 2. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{3\cdot 2^n - 1}{2^n}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3.$

Vận dụng 1. Một quả bóng cao su được thả từ độ cao 5 m xuống một mặt sàn. Sau mỗi lần chạm sàn, quả bóng nảy lên độ cao bằng $\dfrac{2}{3}$ độ cao trước đó. Giả sử rằng quả bóng luôn chuyển động vuông góc với mặt sàn và quá trình này tiếp diễn vô hạn lần. Giả sử u_n là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng sau lần nảy lên thứ n. Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn là 0.

2. ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

HĐ3. Hình thành quy tắc tính giới hạn

Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) với $u_n = 2 + \dfrac{1}{n}$, $v_n = 3 - \dfrac{2}{n}$.

Tính và so sánh: $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Tổng quát, ta có các quy tắc tính giới hạn sau đây:

a) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$ thì

$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = a + b;$ $\quad\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = a - b;$

$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \cdot v_n) = a \cdot b;$ $\quad\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$ (nếu $b \neq 0$).

b) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ thì

$$a \geq 0 \text{ và } \lim_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{a}.$$

Ví dụ 3. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+n+1}{2n^2-1}$.

Để tính giới hạn của dãy số dạng phân thức, ta chia cả tử thức và mẫu thức cho luỹ thừa cao nhất của n, rồi áp dụng các quy tắc tính giới hạn.

Giải

Áp dụng các quy tắc tính giới hạn, ta được

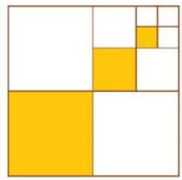
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n+1}{2n^2-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Luyện tập 3. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2n^2+1}}{n+1}$.

3. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

HĐ4. Làm quen với việc tính tổng vô hạn

Cho hình vuông cạnh 1 (đơn vị độ dài). Chia hình vuông đó thành bốn hình vuông nhỏ bằng nhau, sau đó tô màu hình vuông nhỏ góc dưới bên trái (H.5.2). Lặp lại các thao tác này với hình vuông nhỏ góc trên bên phải. Giả sử quá trình trên tiếp diễn vô hạn lần. Gọi $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ lần lượt là độ dài cạnh của các hình vuông được tô màu.



Hình 5.2

a) Tính tổng $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

b) Tìm $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với công bội q. Khi đó

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Vì $|q| < 1$ nên $q^n \to 0$ khi $n \to +\infty$. Do đó, ta có

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{u_1}{1-q} - \left(\frac{u_1}{1-q}\right)q^n\right] = \frac{u_1}{1-q}.$$

Giới hạn này được gọi là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n), và kí hiệu là

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

Như vậy

$$\boxed{S = \frac{u_1}{1-q} \quad (|q| < 1).}$$

Ví dụ 4. Tính tổng $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots$

Giải

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1$ và $q = -\frac{1}{2}$.

Do đó

$$S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}.$$

Ví dụ 5. Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn 2,222.... dưới dạng phân số.

Giải

Ta có $2{,}222... = 2 + 0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}002 + ... = 2 + 2\cdot 10^{-1} + 2\cdot 10^{-2} + 2\cdot 10^{-3} + ...$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 2$, $q = 10^{-1}$ nên

$$2{,}222... = \frac{u_1}{1-q} = \frac{2}{1-\frac{1}{10}} = \frac{20}{9}.$$

Luyện tập 4. Tính tổng $S = 2 + \frac{2}{7} + \frac{2}{49} + \ldots + \frac{2}{7^{n-1}} + \ldots$

Vận dụng 2. (Giải thích nghịch lí Zeno)

Để đơn giản, ta giả sử Achilles chạy với vận tốc 100 km/h, vận tốc của rùa là 1 km/h và khoảng cách ban đầu $a = 100$ (km).

a) Tính thời gian $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ tương ứng để Achilles đi từ A_1 đến A_2, từ A_2 đến $A_3, \ldots$, từ A_n đến $A_{n+1}, \ldots$

b) Tính tổng thời gian cần thiết để Achilles chạy hết các quãng đường A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_{n+1}, ..., tức là thời gian cần thiết để Achilles đuổi kịp rùa.

c) Sai lầm trong lập luận của Zeno là ở đâu?

4. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA DÃY SỐ

HĐ5. Nhận biết giới hạn vô cực

Một loại vi khuẩn được nuôi cấy với số lượng ban đầu là 50. Sau mỗi chu kì 4 giờ, số lượng của chúng sẽ tăng gấp đôi.

a) Dự đoán công thức tính số vi khuẩn u_n sau chu kì thứ n.

b) Sau bao lâu, số lượng vi khuẩn sẽ vượt con số 10 000?

- Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn $+\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.
- Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn $-\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(-u_n) = +\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n \to +\infty$.

Theo định nghĩa trên, ta có:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$, với k là số nguyên dương;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, với $q > 1$.

Liên quan đến giới hạn vô cực của dãy số, ta có một số quy tắc sau đây:

- Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (hoặc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$) thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.
- Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$.
- Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a > 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$.

Ví dụ 6. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 - 2n)$.

Giải

Ta có $n^2 - 2n = n^2\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)$. Hơn nữa $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{2}{n}\right) = 1$.

Do đó, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 - 2n) = +\infty$.

Luyện tập 5. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n - \sqrt{n}\right)$.

BÀI TẬP

5.1. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 + n + 1}{2n^2 + 1}$;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - n\right)$.

5.2. Cho hai dãy số không âm (u_n) và (v_n) với $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$.

Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n^2}{v_n - u_n}$;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n + 2v_n}$.

5.3. Tìm giới hạn của các dãy số cho bởi:

a) $u_n = \dfrac{n^2 + 1}{2n - 1}$;

b) $v_n = \sqrt{2n^2 + 1} - n$.

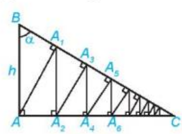
5.4. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây dưới dạng phân số:

a) $1,(12) = 1,121212\ldots$;

b) $3,(102) = 3,102102102\ldots$

5.5. Một bệnh nhân hàng ngày phải uống một viên thuốc 150 mg. Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%. Tính lượng thuốc có trong cơ thể sau khi uống viên thuốc của ngày thứ 5. Ước tính lượng thuốc trong cơ thể nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài.

5.6. Cho tam giác vuông ABC vuông tại A, có $AB = h$ và góc B bằng α (H.5.3). Từ A kẻ $AA_1 \perp BC$, từ A_1 kẻ $A_1A_2 \perp AC$, sau đó lại kẻ $A_2A_3 \perp BC$. Tiếp tục quá trình trên, ta được đường gấp khúc vô hạn $AA_1A_2A_3\ldots$ Tính độ dài đường gấp khúc này theo h và α.



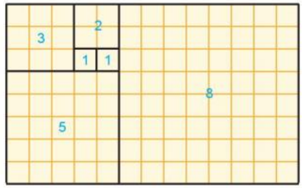
Hình 5.3

Em có biết?

Dãy số Fibonacci và tỉ lệ vàng

Ta đã biết dãy Fibonacci cho bởi hệ thức truy hồi:

$$u_1 = u_2 = 1,\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$
$$\text{với } n > 2.$$



Chia hai vế cho u_{n-1} và đặt $v_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}$, ta có công thức

$$v_n = 1 + \frac{1}{v_{n-1}}.$$

Dãy (v_n) có giới hạn là một số dương r thoả mãn phương trình $r = 1 + \frac{1}{r}$, hay tương đương $r^2 - r - 1 = 0$. Giải phương trình này ta được $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Đây chính là *tỉ lệ vàng* (golden ratio) được sử dụng trong kiến trúc, hội hoạ, tôn giáo, ... Dãy Fibonacci và tỉ lệ vàng cũng xuất hiện nhiều trong thế giới tự nhiên.

Dãy số logistic

Trong sinh thái học, người ta sử dụng dãy (p_n) cho bởi công thức truy hồi $p_{n+1} = kp_n(1 - p_n)$ để mô phỏng hệ sinh thái của một loài (động vật hoặc thực vật), trong đó p_n là tỉ lệ giữa số lượng cá thể theo thời gian và sức chứa của môi trường, k là hệ số phụ thuộc đặc điểm của loài và điều kiện môi trường. Dãy số này được gọi là dãy logistic, do nhà sinh học Robert May đưa ra năm 1976. Tuỳ thuộc hệ số k và giá trị ban đầu p_0, ta có thể dự đoán sự thay đổi của hệ trong tương lai. Đặc biệt, trong trường hợp dãy (p_n) có giới hạn là một số dương, ta nói hệ sinh thái của loài là ổn định.

(Theo Stewart, Calculus, Nhà xuất bản Cengage Learning)

Bài 16 GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

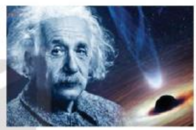
THUẬT NGỮ
- Giới hạn của hàm số
- Giới hạn một phía
- Giới hạn tại vô cực
- Giới hạn vô cực

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Nhận biết khái niệm giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm và tại vô cực.
- Nhận biết khái niệm giới hạn một phía.
- Nhận biết khái niệm giới hạn vô cực.
- Tính một số dạng giới hạn của hàm số.
- Giải quyết một số vấn đề thực tiễn gắn với giới hạn của hàm số.

Trong Thuyết tương đối của Einstein, khối lượng của vật chuyển động với vận tốc v cho bởi công thức

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

trong đó m_0 là khối lượng của vật khi nó đứng yên, c là vận tốc ánh sáng. Chuyện gì xảy ra với khối lượng của vật khi vận tốc của vật gần với vận tốc ánh sáng?



Albert Einstein (1879 – 1955)

1. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

HĐ1. Nhận biết khái niệm giới hạn tại một điểm

Cho hàm số $f(x)=\frac{4-x^2}{x-2}$.

a) Tìm tập xác định của hàm số $f(x)$.

b) Cho dãy số $x_n=\frac{2n+1}{n}$. Rút gọn $f(x_n)$ và tính giới hạn của dãy (u_n) với $u_n=f(x_n)$.

c) Với dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n\neq 2$ và $x_n\to 2$, tính $f(x_n)$ và tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$.

Giả sử $(a;\,b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;\,b)$, có thể trừ điểm x_0. Ta nói hàm số $f(x)$ có **giới hạn** là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n\in(a;\,b), x_n\neq x_0$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to x_0$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$. Chứng tỏ rằng $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\frac{1}{2}$.

Giải

Lấy dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n \neq 1$ và $x_n \to 1$. Ta có $f(x_n) = \dfrac{x_n - 1}{x_n^2 - 1} = \dfrac{1}{x_n + 1}$.

Do đó $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{x_n + 1} = \dfrac{1}{2}$. Vậy $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Tương tự đối với dãy số, ta có các quy tắc tính giới hạn của hàm số tại một điểm như sau:

a) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$ thì

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M;$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = L - M;$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M;$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \text{ nếu } M \neq 0.$$

b) Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

- $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ với c là hằng số.
- $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0^n$ với $n \in \mathbb{N}$.

Ví dụ 2. Cho $f(x) = x - 1$ và $g(x) = x^3$. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 1} [3f(x) - g(x)]$; b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{[f(x)]^2}{g(x)}$.

Giải

Ta có $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x - 1) = \lim\limits_{x \to 1} x - \lim\limits_{x \to 1} 1 = 1 - 1 = 0$. Mặt khác, ta thấy $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \lim\limits_{x \to 1} x^3 = 1$.

a) Ta có

$$\lim_{x \to 1} [3f(x) - g(x)] = \lim_{x \to 1} [3f(x)] - \lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} 3 \cdot \lim_{x \to 1} f(x) - \lim_{x \to 1} g(x) = 3 \cdot 0 - 1 = -1.$$

b) Ta có

$$\lim_{x \to 1} \frac{[f(x)]^2}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to 1} [f(x)]^2}{\lim\limits_{x \to 1} g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to 1} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to 1} f(x)}{\lim\limits_{x \to 1} g(x)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Ví dụ 3. Tính $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 9} - 3}{x}$.

Giải

Do mẫu thức có giới hạn là 0 khi $x \to 0$ nên ta không thể áp dụng ngay quy tắc tính giới hạn của thương hai hàm số.

Chú ý rằng $\dfrac{\sqrt{x + 9} - 3}{x} = \dfrac{(\sqrt{x + 9})^2 - 3^2}{x(\sqrt{x + 9} + 3)} = \dfrac{x}{x(\sqrt{x + 9} + 3)} = \dfrac{1}{\sqrt{x + 9} + 3}$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+9}+3}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\left[\sqrt{x+9}+3\right]}=\dfrac{1}{6}$.

Luyện tập 1. Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

HĐ2. Nhận biết khái niệm giới hạn một bên

Cho hàm số $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$.

a) Cho $x_n=\dfrac{n}{n+1}$ và $x'_n=\dfrac{n+1}{n}$. Tính $y_n=f(x_n)$ và $y'_n=f(x'_n)$.

b) Tìm giới hạn của các dãy số (y_n) và (y'_n).

c) Cho các dãy số (x_n) và (x'_n) bất kì sao cho $x_n<1<x'_n$ và $x_n\to 1$, $x'_n\to 1$, tính $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x'_n)$.

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$. Ta nói số L là **giới hạn bên phải** của $f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì thoả mãn $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$.
- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$. Ta nói số L là **giới hạn bên trái** của $f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì thoả mãn $a<x_n<x_0$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{nếu } 0<x<1\\ x+1 & \text{nếu } 1\le x<2.\end{cases}$

Tính $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

Giải

Với dãy số (x_n) bất kì sao cho $0<x_n<1$ và $x_n\to 1$, ta có $f(x_n)=x_n^2$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=1$.

Tương tự, với dãy số (x_n) bất kì mà $1<x_n<2$, $x_n\to 1$, ta có $f(x_n)=x_n+1$, cho nên $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=2$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$.

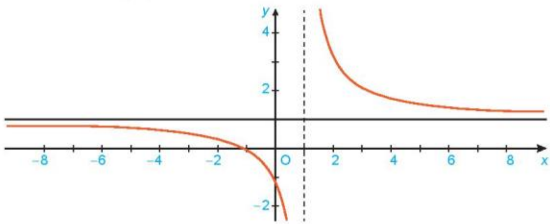
Luyện tập 2. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} -x & \text{nếu } x<0\\ \sqrt{x} & \text{nếu } x\ge 0.\end{cases}$

Tính $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

HĐ3. Nhận biết khái niệm giới hạn tại vô cực

Cho hàm số $f(x)=1+\dfrac{2}{x-1}$ có đồ thị như Hình 5.4.



Hình 5.4

Giả sử (x_n) là dãy số sao cho $x_n>1$, $x_n\to+\infty$. Tính $f(x_n)$ và tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$.

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi $x\to+\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$, ta có $f(x_n)\to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to+\infty$.
- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty;b)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi $x\to-\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n<b$ và $x_n\to-\infty$, ta có $f(x_n)\to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to-\infty$.

Ví dụ 5. Cho $f(x)=2+\dfrac{4}{x-1}$. Sử dụng định nghĩa, tìm $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Giải

Lấy dãy (x_n) bất kì sao cho $x_n>1$ và $x_n\to+\infty$, ta có $f(x_n)=2+\dfrac{4}{x_n-1}$. Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=2$.

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$. Tương tự, ta cũng có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$.

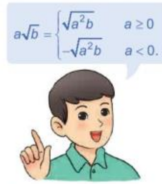
- Các quy tắc tính giới hạn hữu hạn tại một điểm cũng đúng cho giới hạn hữu hạn tại vô cực.
- Với c là hằng số, ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} c=c$, $\lim\limits_{x\to-\infty} c=c$.
- Với k là một số nguyên dương, ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^k}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^k}=0$.

Ví dụ 6. Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2}}\right)=-\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$

$$=-\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=-\sqrt{1+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}=-1.$$



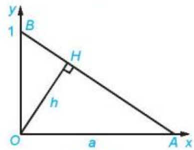
Luyện tập 3. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{x+1}$.

Vận dụng. Cho tam giác vuông OAB với $A=(a;0)$ và $B=(0;1)$ như Hình 5.5. Đường cao OH có độ dài là h.

a) Tính h theo a.

b) Khi điểm A dịch chuyển về O, điểm H thay đổi thế nào? Tại sao?

c) Khi A dịch chuyển ra vô cực theo chiều dương của trục Ox, điểm H thay đổi thế nào? Tại sao?



Hình 5.5

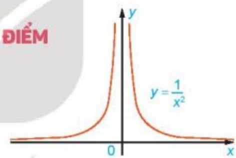
3. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

a) Giới hạn vô cực

HĐ4. Nhận biết khái niệm giới hạn vô cực

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ có đồ thị như Hình 5.6.

Cho $x_n=\dfrac{1}{n}$, chứng tỏ rằng $f(x_n)\to+\infty$.



Hình 5.6

Giả sử khoảng $(a;b)$ chứa x_0 và hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)\setminus\{x_0\}$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn $+\infty$ khi $x\to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n\in(a;b)\setminus\{x_0\}$, $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to+\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$.

Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn $-\infty$ khi $x\to x_0$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$, nếu $\lim\limits_{x\to x_0}[-f(x)]=+\infty$.

Ví dụ 7. Tính $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{|x-1|}$.

Giải

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{|x-1|}$. Lấy dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n\ne1$, $x_n\to1$. Khi đó, $|x_n-1|\to0$.

Do đó $f(x_n)=\dfrac{1}{|x_n-1|}\to+\infty$. Vậy $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{|x-1|}=+\infty$.

HĐ5. Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{x-1}$. Với các dãy số (x_n) và (x'_n) cho bởi $x_n=1+\frac{1}{n}$, $x'_n=1-\frac{1}{n}$, tính $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x'_n)$.

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn $+\infty$ khi $x\to x_0$ về bên phải nếu với dãy số (x_n) bất kì thoả mãn $x_0<x_n<b$, $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to+\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$.
- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn $+\infty$ khi $x\to x_0$ về bên trái nếu với dãy số (x_n) bất kì thoả mãn $a<x_n<x_0$, $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to+\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$.
- Các giới hạn một bên $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$ được định nghĩa tương tự.

Ví dụ 8. Giải bài toán ở *tình huống mở đầu*.

Giải

Từ công thức khối lượng

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

ta thấy m là một hàm số của v, với tập xác định là nửa khoảng $[0;c)$. Rõ ràng khi v tiến gần tới vận tốc ánh sáng, tức là $v\to c^-$, ta có $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\to 0$. Do đó $\lim\limits_{v\to c^-} m(v)=+\infty$, nghĩa là khối lượng m của vật trở nên vô cùng lớn khi vận tốc của vật gần với vận tốc ánh sáng.

Luyện tập 4. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{|x|}$; b) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{\sqrt{2-x}}$.

Chú ý. Các giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ được định nghĩa tương tự như giới hạn của hàm số $f(x)$ tại vô cực. Chẳng hạn: Ta nói hàm số $y=f(x)$, xác định trên khoảng $(a;+\infty)$, có giới hạn là $-\infty$ khi $x\to+\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$, ta có $f(x_n)\to-\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ hay $f(x)\to-\infty$ khi $x\to+\infty$.

Một số giới hạn đặc biệt:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty$ với k nguyên dương;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=+\infty$ với k là số chẵn;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=-\infty$ với k là số lẻ.

b) Một số quy tắc tính giới hạn vô cực

Chú ý các quy tắc tính giới hạn hữu hạn không còn đúng cho giới hạn vô cực.

Ta có một số quy tắc tính giới hạn của tích và thương hai hàm số khi một trong hai hàm số đó có giới hạn vô cực.

- *Quy tắc tìm giới hạn của tích* $f(x)g(x)$.

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L\neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ (hoặc $-\infty$). Khi đó $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ được tính theo quy tắc cho trong bảng sau:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$
$L>0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L<0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

- *Quy tắc tìm giới hạn của thương* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tuỳ ý	0
$L>0$	0	+	$+\infty$
		−	$-\infty$
$L<0$	0	+	$-\infty$
		−	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp $x\to x_0^+$, $x\to x_0^-$.

Ví dụ 9. Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x^2}$.

Giải

Ta sử dụng quy tắc tìm giới hạn của thương. Rõ ràng, giới hạn của tử số $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1$.

Ngoài ra, mẫu số nhận giá trị dương với mọi $x\neq 0$ và $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$. Do vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x^2}=+\infty$.

Ví dụ 10. Tính $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x(1-x)}$ và $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x(1-x)}$.

Giải

Viết $\dfrac{1}{x(1-x)}=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{1-x}$, ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x}=1>0$. Hơn nữa $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{1-x}=-\infty$ do $1-x<0$ khi $x>1$.

Áp dụng quy tắc tìm giới hạn của tích, ta được $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x(1-x)}=-\infty$.

Lí luận tương tự, ta có $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x(1-x)}=+\infty$.

Luyện tập 5. Tính $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x-1}{x-2}$ và $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x-1}{x-2}$.

BÀI TẬP

5.7. Cho hai hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ và $g(x)=x+1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

a) $f(x)=g(x)$;

b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

5.8. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+2)^2-4}{x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$.

5.9. Cho hàm số $H(t)=\begin{cases}0 \text{ nếu } t<0\\ 1 \text{ nếu } t\geq 0\end{cases}$ (hàm Heaviside, thường được dùng để mô tả việc chuyển trạng thái tắt/mở của dòng điện tại thời điểm $t=0$).

Tính $\lim\limits_{t\to 0^+} H(t)$ và $\lim\limits_{t\to 0^-} H(t)$.

5.10. Tính các giới hạn một bên:

a) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-2}{x-1}$;

b) $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{x^2-x+1}{4-x}$.

5.11. Cho hàm số $g(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{|x-2|}$.

Tìm $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$ và $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$.

5.12. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1-2x}{\sqrt{x^2+1}}$;

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}-x\right)$.

5.13. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2}{(x-1)(x-2)}$.

Tìm $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$.

Bài 17 HÀM SỐ LIÊN TỤC

THUẬT NGỮ

- Hàm số liên tục tại một điểm
- Hàm số gián đoạn
- Hàm số liên tục trên một khoảng
- Hàm số liên tục trên một đoạn

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận dạng hàm số liên tục tại một điểm, hoặc trên một khoảng, trên một đoạn.
- Nhận dạng tính liên tục của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục.
- Nhận biết tính liên tục của một số hàm sơ cấp cơ bản trên tập xác định của chúng.

Một người lái xe từ địa điểm A đến địa điểm B trong thời gian 3 giờ. Biết quãng đường từ A đến B dài 180 km. Chứng tỏ rằng có ít nhất một thời điểm trên hành trình, xe chạy với vận tốc 60 km/h.

1. HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

HĐ1. Nhận biết tính liên tục của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{nếu } x\neq 1\\ 2 & \text{nếu } x=1.\end{cases}$

Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ và so sánh giá trị này với $f(1)$.

> Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;\,b)$ chứa điểm x_0. Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Hàm số $f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm đó.

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ tại điểm $x_0=2$.

Giải

Rõ ràng hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, do đó $x_0=2$ thuộc tập xác định của hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x-1}=3=f(2)$. Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=2$.

Ví dụ 2. Xét tính liên tục của *hàm dấu* $s(x)=\begin{cases}1 & \text{nếu } x>0\\ 0 & \text{nếu } x=0\\ -1 & \text{nếu } x<0\end{cases}$ tại điểm $x_0=0$.

Giải

Ta thấy $\lim\limits_{x\to 0^+} s(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} s(x)=-1$. Do đó không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} s(x)$.

Vậy hàm số này gián đoạn tại 0.

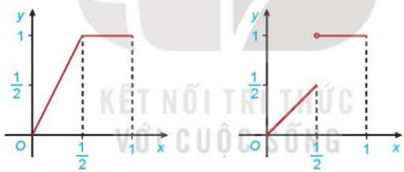
Hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$.

Luyện tập 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}-x & \text{nếu } x<0\\ 0 & \text{nếu } x=0\\ x^2 & \text{nếu } x>0\end{cases}$ tại điểm x_0 = 0.

2. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

HĐ2. Cho hai hàm số $f(x)=\begin{cases}2x & \text{nếu } 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 1 & \text{nếu } \dfrac{1}{2}<x\le 1\end{cases}$ và $g(x)=\begin{cases}x & \text{nếu } 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 1 & \text{nếu } \dfrac{1}{2}<x\le 1\end{cases}$

với đồ thị tương ứng như Hình 5.7



Hàm số y = f(x) *Hàm số y = g(x)*

Hình 5.7

Xét tính liên tục của các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ tại điểm $x=\dfrac{1}{2}$ và nhận xét về sự khác nhau giữa hai đồ thị.

> Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng này.
>
> Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

Các khái niệm hàm số liên tục trên nửa khoảng như $(a; b]$, $[a; +\infty)$,... được định nghĩa theo cách tương tự. Có thể thấy đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một đường liền trên khoảng đó.

Ví dụ 3. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{nếu } x\in(0;1) \\ 0 & \text{nếu } x=1 \end{cases}$ trên nửa khoảng $(0;1]$.

Giải

Ta có $f(x)=x-1$ với $x\in(0;1)$. Với $x_0\in(0;1)$ bất kì, ta có $\lim\limits_{x\to x_0}(x-1)=x_0-1=f(x_0)$. Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0;1)$.

Hơn nữa, $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=0=f(1)$ nên $f(x)$ liên tục trên nửa khoảng $(0;1]$.

Về tính liên tục của các hàm số sơ cấp cơ bản đã biết, ta có

- Hàm số đa thức và các hàm số $y=\sin x$, $y=\cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Các hàm số $y=\tan x$, $y=\cot x$, $y=\sqrt{x}$ và hàm phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) liên tục trên tập xác định của chúng.

Ví dụ 4. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$. Tìm các khoảng trên đó hàm số $f(x)$ liên tục.

Giải

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Luyện tập 2. Tìm các khoảng trên đó hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+2}$ liên tục.

3. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CƠ BẢN

HĐ3. Cho hai hàm số $f(x)=x^2$ và $g(x)=-x+1$.

a) Xét tính liên tục của hai hàm số trên tại $x=1$.

b) Tính $L=\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)+g(x)\right]$ và so sánh L với $f(1)+g(1)$.

Ta có khẳng định sau đây về tổng, hiệu, tích và thương của hai hàm số liên tục.

Giả sử hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục tại điểm x_0. Khi đó:

a) Các hàm số $y=f(x)+g(x)$, $y=f(x)-g(x)$ và $y=f(x)g(x)$ liên tục tại x_0;

b) Hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0)\neq 0$.

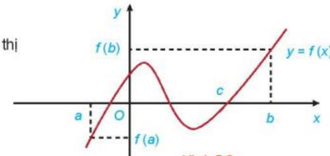
Ví dụ 5. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\dfrac{\sin x}{x-1}$.

Giải

Hàm số xác định trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. Trên các khoảng này, tử thức (hàm lượng giác) và mẫu thức (hàm đa thức) là các hàm số liên tục. Do đó, hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Nhận xét. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Kết quả này được minh hoạ bằng đồ thị như Hình 5.8



Hình 5.8

Ví dụ 6. Chứng minh rằng phương trình $x^5 + x^3 - 10 = 0$ có ít nhất một nghiệm.

Giải

Xét hàm số $f(x) = x^5 + x^3 - 10$. Ta có $f(0) = -10 < 0$, $f(2) = 30 > 0$ và vì $f(x)$ là hàm đa thức nên nó liên tục trên $[0; 2]$. Khi đó, phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0; 2)$.

Vận dụng. Giải bài toán ở *tình huống mở đầu*.

BÀI TẬP

5.14. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số liên tục tại $x = 1$. Biết $f(1) = 2$ và $\lim\limits_{x \to 1}\left[2f(x) - g(x)\right] = 3$. Tính $g(1)$.

5.15. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 5x + 6}$;

b) $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{nếu } x < 1 \\ 4 - x & \text{nếu } x \geq 1. \end{cases}$

5.16. Tìm giá trị của tham số m để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x + m & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

liên tục trên $\mathbb{R}$.

5.17. Một bảng giá cước taxi được cho như sau:

Giá mở cửa (0,5 km đầu)	Giá cước các km tiếp theo đến 30 km	Giá cước từ km thứ 31
10 000 đồng	13 500 đồng	11 000 đồng

a) Viết công thức hàm số mô tả số tiền khách phải trả theo quãng đường di chuyển.

b) Xét tính liên tục của hàm số ở câu a.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

A – TRẮC NGHIỆM

5.18. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}$. Mệnh đề đúng là

A. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

B. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

C. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

D. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

5.19. Cho $u_n = \dfrac{2+2^2+\ldots+2^n}{2^n}$. Giới hạn của dãy số (u_n) bằng

A. 1. B. 2. C. -1. D. 0.

5.20. Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với $u_n = \dfrac{2}{3^n}$. Tổng của cấp số nhân này bằng

A. 3. B. 2. C. 1. D. 6.

5.21. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}$. Mệnh đề đúng là

A. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

B. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$.

D. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$.

5.22. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x-x^2}{|x|}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ bằng

A. 0. B. 1. C. $+\infty$. D. -1.

5.23. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{|x+1|}$. Hàm số $f(x)$ liên tục trên

A. $(-\infty;+\infty)$.

B. $(-\infty;-1]$.

C. $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

D. $[-1;+\infty)$.

5.24. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ a & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ khi

A. $a = 0$. B. $a = 3$. C. $a = -1$. D. $a = 1$.

B – TỰ LUẬN

5.25. Cho dãy số (u_n) có tính chất $|u_n - 1| < \frac{2}{n}$. Có kết luận gì về giới hạn của dãy số này?

5.26. Tìm giới hạn của các dãy số sau:

a) $u_n = \dfrac{n^2}{3n^2 + 7n - 2}$; b) $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{3^k + 5^k}{6^k}$; c) $w_n = \dfrac{\sin n}{4n}$.

5.27. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây dưới dạng phân số.

a) 1,(01); b) 5,(132).

5.28. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{\sqrt{x+2} - 3}{x - 7}$; b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$;

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2 - x}{(1 - x)^2}$; d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x + 2}{\sqrt{4x^2 + 1}}$.

5.29. Tính các giới hạn một bên:

a) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 - 9}{|x - 3|}$; b) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x}{\sqrt{1 - x}}$.

5.30. Chứng minh rằng giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ không tồn tại.

5.31. Giải thích tại sao các hàm số sau đây gián đoạn tại điểm đã cho.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ tại điểm $x = 0$;

b) $g(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{nếu } x < 1 \\ 2 - x & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$ tại điểm $x = 1$.

5.32. Lực hấp dẫn tác dụng lên một đơn vị khối lượng ở khoảng cách r tính từ tâm Trái Đất là

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{nếu } r < R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{nếu } r \geq R, \end{cases}$$

trong đó M và R lần lượt là khối lượng và bán kính của Trái Đất, G là hằng số hấp dẫn. Xét tính liên tục của hàm số $F(r)$.

5.33. Tìm tập xác định của các hàm số sau và giải thích tại sao các hàm này liên tục trên các khoảng xác định của chúng.

a) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2 + 5x + 6}$; b) $g(x) = \dfrac{x - 2}{\sin x}$.

5.34. Tìm các giá trị của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{nếu } x \leq a \\ x^2 & \text{nếu } x > a \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

HOẠT ĐỘNG THỰC HÀNH TRẢI NGHIỆM

MỘT VÀI ÁP DỤNG CỦA TOÁN HỌC TRONG TÀI CHÍNH

MỤC TIÊU

Học sinh biết vận dụng toán học để giải quyết một số vấn đề tài chính như bài toán gửi tiết kiệm tích luỹ, bài toán vay trả góp.

Chuẩn bị:

- Bảng lãi suất gửi tiết kiệm tích luỹ của một số ngân hàng;
- Bảng lãi suất vay trả góp (khi mua nhà, ô tô, ...) của một số ngân hàng;
- Máy tính cầm tay.

Thực hiện: Chia lớp làm bốn nhóm và tiến hành như sau:

Bước 1. Các nhóm cùng thực hiện HĐ1, HĐ2, HĐ3 trong bài học, dưới sự hướng dẫn của giáo viên, để hiểu các khái niệm và công thức cần thiết.

Bước 2. Dựa vào dữ liệu đã có ở phần Chuẩn bị và gợi ý trong các Vận dụng trong bài học, GV đặt ra nhiệm vụ thực tế cụ thể cho từng nhóm. Mỗi nhóm sẽ thực hiện một nhiệm vụ riêng. Các nhóm hoàn thành nhiệm vụ được giao, sau đó báo cáo trước lớp.

Nhiều giao dịch tài chính như gửi tiết kiệm tích luỹ, vay trả góp,... liên quan đến các khoản thanh toán được thực hiện đều đặn. Ví dụ, nếu gửi đều đặn 5 triệu đồng mỗi tháng vào một tài khoản tích luỹ có lãi suất 6% một năm, thì giá trị tài khoản của bạn sẽ là bao nhiêu vào cuối năm thứ 5? Nếu vay 1 tỉ đồng để mua nhà với lãi suất 9% một năm, thì số tiền bạn phải trả hằng tháng là bao nhiêu để có thể trả hết khoản vay này trong 10 năm?

Những câu hỏi như vậy liên quan đến tổng các số hạng của một dãy số. Trong bài này, chúng ta sẽ sử dụng kiến thức về công thức lãi kép và cấp số nhân để trả lời những câu hỏi này.

1. SỐ TIỀN CỦA MỘT NIÊN KIM

Niên kim là một khoản tiền được trả bằng các khoản thanh toán đều đặn. Mặc dù từ "niên kim" nghĩa là các khoản thanh toán hằng năm, thực tế chúng có thể được thực hiện thanh toán nửa năm, hằng quý, hằng tháng hoặc sau những khoảng thời gian đều đặn khác. Thanh toán thường được thực hiện vào cuối khoảng thời gian thanh toán. Số tiền của một niên kim là tổng của tất cả các khoản thanh toán riêng lẻ từ thời điểm thanh toán đầu tiên cho đến khi thanh toán cuối cùng được thực hiện, cùng với tất cả tiền lãi.

HĐ1. Số tiền của một niên kim

Bác Lan gửi đều đặn 10 triệu đồng vào ngày đầu mỗi tháng trong vòng 5 năm vào một tài khoản tích luỹ hưởng lãi suất 6% mỗi năm, theo hình thức tính lãi kép hằng tháng.

a) Tính số tiền có trong tài khoản vào cuối kì thứ nhất, cuối kì thứ hai.

b) Tính số tiền có trong tài khoản vào cuối kì thứ n.

c) Tính số tiền có trong tài khoản ngay sau lần thanh toán cuối cùng.

Nói chung, khoản thanh toán theo niên kim được gọi là *tiền thuê định kì* và kí hiệu là R. Gọi i là lãi suất trong mỗi khoảng thời gian thanh toán và gọi n là số lần trả. Chúng ta luôn giả thiết rằng khoảng thời gian tính lãi kép bằng thời gian giữa các lần thanh toán. Bằng cách lập luận tương tự như trong HĐ1, chúng ta thấy rằng số tiền A_f của một niên kim là

$$A_f = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + \ldots + R(1+i)^{n-1}.$$

Vì đây là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân với số hạng đầu tiên $a = R$ và công bội $r = 1 + i$, nên ta có

Số tiền của niên kim

Số tiền A_f của một niên kim bao gồm n khoản thanh toán đều đặn bằng nhau và bằng R với lãi suất i trong mỗi khoảng thời gian được cho bởi

$$A_f = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Vận dụng 1. Anh Bình cần đầu tư bao nhiêu tiền hằng tháng với lãi suất 9% mỗi năm, theo hình thức tính lãi kép hằng tháng, để có 200 triệu đồng sau hai năm?

2. GIÁ TRỊ HIỆN TẠI CỦA MỘT NIÊN KIM

Nếu bạn nhận được 100 triệu đồng trong vòng 5 năm kể từ bây giờ, nó sẽ có giá trị thấp hơn nhiều so với việc nếu bạn nhận được 100 triệu đồng ngay bây giờ. Điều này là do số tiền lãi mà bạn có thể tích lũy trong 5 năm tới nếu bạn đầu tư số tiền đó ngay bây giờ. Bạn sẽ chấp nhận số tiền nhỏ hơn nào bây giờ thay vì việc nhận 100 triệu đồng trong 5 năm tới? Đây là số tiền, cùng với tiền lãi, sẽ trị giá 100 triệu đồng trong 5 năm tới. Số tiền này được gọi là *giá trị hiện tại*.

HĐ2. Nhận biết giá trị hiện tại của một số tiền

Giả sử một người gửi tiết kiệm với lãi suất không đổi 6% một năm, theo hình thức tính lãi kép hằng quý.

a) Tính lãi suất i trong mỗi quý và số khoảng thời gian tính lãi trong vòng 5 năm.

b) Giả sử sau 5 năm người đó nhận được số tiền 100 triệu đồng cả vốn lẫn lãi. Tính giá trị hiện tại của số tiền 100 triệu đồng đó.

Tương tự, nếu số tiền A_f được trả dần trong n khoảng thời gian kể từ bây giờ và lãi suất trong mỗi khoảng thời gian là i, thì giá trị hiện tại A_p của nó được cho bởi

$$A_p = A_f(1+i)^{-n} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^{-n} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Giá trị hiện tại của một niên kim

Giá trị hiện tại của một niên kim bao gồm n khoản thanh toán đều đặn bằng nhau và bằng R với lãi suất i trong mỗi khoảng thời gian được cho bởi

$$A_p = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Vận dụng 2. Một người trúng xổ số giải đặc biệt với trị giá 5 tỉ đồng và số tiền trúng thưởng sẽ được trả dần hằng năm, mỗi năm là 500 triệu đồng trong vòng 10 năm. Giá trị hiện tại của giải đặc biệt này là bao nhiêu? Giả sử rằng người đó có thể tìm được hình thức đầu tư với lãi suất 8% mỗi năm, tính lãi kép hằng năm.

3. MUA TRẢ GÓP

Khi bạn mua một căn nhà hoặc một chiếc xe ô tô theo *hình thức trả góp*, các khoản thanh toán mà bạn thực hiện là một khoản niên kim có giá trị hiện tại là số tiền của khoản vay.

HĐ3. Anh Hưng muốn mua một chiếc xe ô tô theo hình thức trả góp để chạy xe dịch vụ. Anh ấy có thể trả dần 10 triệu đồng mỗi tháng nhưng không có tiền trả trước. Nếu anh Hưng có thể thực hiện các khoản thanh toán này trong vòng 5 năm và lãi suất là 10% một năm, thì hiện tại anh ấy có thể mua được chiếc xe ô tô với mức giá nào?

Trả góp là phương thức cho vay tiền mà các kì trả nợ gốc và lãi trùng nhau. Số tiền trả nợ của mỗi kì là bằng nhau theo thoả thuận và số lãi được tính dựa trên số dư nợ gốc và thời hạn thực tế của kì hạn trả nợ. Trả góp còn áp dụng trong việc cho vay tiêu dùng, mua tài sản giá trị lớn như nhà đất, ô tô, ...

Mua trả góp

Nếu một khoản vay A_p phải được hoàn trả trong n lần thanh toán đều đặn bằng nhau với lãi suất i trong mỗi khoảng thời gian thì số tiền R của mỗi khoản thanh toán là

$$R = \frac{iA_p}{1-(1+i)^{-n}}.$$

Vận dụng 3. Một cặp vợ chồng trẻ vay ngân hàng 1 tỉ đồng với lãi suất 9% một năm để mua nhà. Họ dự định sẽ trả góp hằng tháng trong vòng 10 năm để hoàn trả khoản vay này. Hỏi mỗi tháng họ sẽ phải trả cho ngân hàng bao nhiêu tiền?

LỰC CĂNG MẶT NGOÀI CỦA NƯỚC

MỤC TIÊU

Học sinh biết thực hiện thí nghiệm để thu thập dữ liệu, biết sử dụng những số đặc trưng của số liệu ghép nhóm để so sánh kết quả và rút ra một số kết luận.

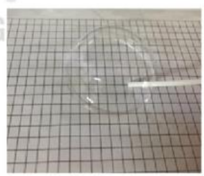
Nước cũng như các chất lỏng đều có lực căng bề mặt hình thành do sự tương tác giữa các phân tử của chất lỏng. Sẽ rất khó để thổi bong bóng từ nước do lực căng bề mặt của nước lớn. Tuy nhiên, nếu pha thêm xà phòng vào nước việc này sẽ được thực hiện do xà phòng làm giảm lực này của nước. Lực càng yếu bong bóng càng lớn.

Trong bài trải nghiệm này chúng ta sẽ xem xét ảnh hưởng của nhiệt độ tới lực căng mặt ngoài của nước xà phòng thông qua việc so sánh đường kính bong bóng thổi từ dung dịch xà phòng ở nhiệt độ khác nhau.

HĐ1. Thu thập dữ liệu

Chuẩn bị:

- Nước, nước nóng
- Xà phòng
- Nhiệt kế
- Cốc, thìa, ống hút
- Giấy bóng kính, giấy có đường kẻ chia centimét
- Bút, giấy.



Thực hiện:

- Nhóm 1:
- *Bước 1.* Pha xà phòng vào nước ở nhiệt độ phòng
- *Bước 2.* Đặt tờ giấy kẻ ô li xuống dưới tấm nhựa
- *Bước 3.* Dùng thìa múc một lượng nước xà phòng đổ lên trên tấm nhựa
- *Bước 4.* Dùng ống hút thổi bóng đến khi bóng vỡ
- *Bước 5.* Xác định đường kính bong bóng
- *Bước 6.* Lưu kết quả đo vào bảng theo mẫu sau:

Nhóm 1										
Đường kính bong bóng (cm)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16)	[16; 18)	[18; 20)	[20; 22]
Kết quả (đánh dấu /)		/	///							

Bảng 1. Kết quả thí nghiệm trên nước xà phòng ở nhiệt độ phòng

- Nhóm 2: Thực hiện tương tự với nước nóng (70° C – 80° C).

HĐ2. Lập bảng tần số ghép nhóm cho kết quả thí nghiệm thu được ở hai nhóm theo mẫu sau:

Đường kính bong bóng (cm)		[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16)	[16; 18)	[18; 20)	[20; 22]
Tần số	Nhóm 1										
	Nhóm 2										

Bảng 2. Bảng tần số ghép nhóm cho dữ liệu đường kính bong bóng

HĐ3. Dựa vào Bảng 2, hãy tính và so sánh số trung bình, trung vị, mốt của mẫu dữ liệu thu được về đường kính bong bóng của mỗi nhóm.

HĐ4. Các bạn học sinh lớp 11*B* đã thực hiện thí nghiệm và thu được bảng kết quả sau:

	Đường kính bong bóng (cm)							
	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)	[14; 16)	[16; 18)	[18; 20]
Nhóm 2			/	//	/	///// ///	///// ///	//
Nhóm 1	/	/	///// ////	///// ////	////	////	/	

a) Hãy thực hiện HĐ2 và HĐ3 dựa vào bảng kết quả thí nghiệm trên. Từ đó rút ra kết luận về ảnh hưởng của nhiệt độ lên sức căng bề mặt của nước xà phòng.

b) Tại sao giặt quần áo bằng nước ấm (với nhiệt độ thích hợp với chất liệu vải) sẽ làm sạch dễ dàng và nhanh chóng hơn?

BẢNG TRA CỨU THUẬT NGỮ

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

Thuật ngữ	Giải thích
Biểu diễn một góc lượng giác trên đường tròn lượng giác	Phép biểu diễn giao điểm của tia cuối của một góc lượng giác với đường tròn lượng giác
Cấp số nhân lùi vô hạn	Cấp số nhân vô hạn có công bội q với $\|q\| < 1$
Dãy số hữu hạn	Dãy số chỉ gồm có hữu hạn số hạng
Đường hình sin	Đồ thị của các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$
Đường tròn lượng giác	Đường tròn có tâm tại gốc toạ độ, bán kính bằng 1, được định hướng và lấy điểm $A(1; 0)$ làm điểm gốc của đường tròn
Giá trị lượng giác của một góc lượng giác	Các giá trị sin, côsin và tang, côtang (khi chúng xác định) của một góc lượng giác
Giới hạn một bên của hàm số tại một điểm	Giới hạn bên phải hoặc giới hạn bên trái của hàm số tại một điểm
Hàm số gián đoạn tại một điểm	Hàm số không liên tục tại điểm đó
Hàm số liên tục trên đoạn [a; b]	Hàm số liên tục tại mọi điểm của khoảng $(a; b)$, liên tục phải tại điểm a và liên tục trái tại điểm b
Hệ thức lượng giác cơ bản	Các hệ thức lượng giác liên hệ giữa các giá trị lượng giác $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ của góc α
Hình biểu diễn của một hình không gian	Hình chiếu song song của hình không gian trên một mặt phẳng hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó
Hình học không gian	Môn học nghiên cứu tính chất của các hình có thể không cùng nằm trong một mặt phẳng
Phép chiếu song song	Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' là giao của đường thẳng qua M và song song (hoặc trùng) với đường thẳng l cho trước và mặt phẳng (P) cho trước
Phương trình lượng giác	Phương trình có chứa ẩn số dưới dấu hàm số lượng giác
Rađian	Đơn vị đo góc lượng giác

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch Hội đồng Thành viên NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

Chịu trách nhiệm nội dung:
Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập nội dung: HOÀNG VIỆT – VŨ THỊ VÂN
Biên tập mĩ thuật: NGUYỄN BÍCH LA
Thiết kế sách: PHAN THỊ THU HƯƠNG
Trình bày bìa: NGUYỄN BÍCH LA
Minh hoạ: BÙI VIỆT DUY
Sửa bản in: VŨ THỊ THANH TÂM
Chế bản: CTCP MĨ THUẬT VÀ TRUYỀN THÔNG

TOÁN 11 – TẬP MỘT

Mã số: ...
In ... bản, (QĐ ...) khổ 19 x 26,5 cm.
Đơn vị in: ...
Cơ sở in: ...
Số ĐKXB: .../CXBIPH/.../GD.
Số QĐXB: .../QĐ - GD - HN ngày ... tháng ...năm ...
In xong và nộp lưu chiểu tháng ... năm 20...
Mã số ISBN: ...

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

BỘ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 11 – KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

1. Ngữ văn 11, tập một
2. Ngữ văn 11, tập hai
3. Chuyên đề học tập Ngữ văn 11
4. Toán 11, tập một
5. Toán 11, tập hai
6. Chuyên đề học tập Toán 11
7. Lịch sử 11
8. Chuyên đề học tập Lịch sử 11
9. Địa lí 11
10. Chuyên đề học tập Địa lí 11
11. Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 11
12. Chuyên đề học tập Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 11
13. Vật lí 11
14. Chuyên đề học tập Vật lí 11
15. Hoá học 11
16. Chuyên đề học tập Hoá học 11
17. Sinh học 11
18. Chuyên đề học tập Sinh học 11
19. Công nghệ 11 – Công nghệ cơ khí
20. Chuyên đề học tập Công nghệ 11 – Công nghệ cơ khí
21. Công nghệ 11 – Công nghệ chăn nuôi
22. Chuyên đề học tập Công nghệ 11 – Công nghệ chăn nuôi
23. Tin học 11 – Định hướng Khoa học máy tính
24. Tin học 11 – Định hướng Tin học ứng dụng
25. Chuyên đề học tập Tin học 11 – Định hướng Tin học ứng dụng
26. Chuyên đề học tập Tin học 11 – Định hướng Khoa học máy tính
27. Mĩ thuật 11 – Thiết kế mĩ thuật đa phương tiện
28. Mĩ thuật 11 – Thiết kế đồ hoạ
29. Mĩ thuật 11 – Thiết kế thời trang
30. Mĩ thuật 11 – Thiết kế mĩ thuật sân khấu, điện ảnh
31. Mĩ thuật 11 – Lí luận và lịch sử mĩ thuật
32. Mĩ thuật 11 – Điêu khắc
33. Mĩ thuật 11 – Kiến trúc
34. Mĩ thuật 11 – Hội hoạ
35. Mĩ thuật 11 – Đồ hoạ (tranh in)
36. Mĩ thuật 11 – Thiết kế công nghiệp
37. Chuyên đề học tập Mĩ thuật 11
38. Âm nhạc 11
39. Chuyên đề học tập Âm nhạc 11
40. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 11
41. Giáo dục thể chất 11 – Bóng chuyền
42. Giáo dục thể chất 11 – Bóng đá
43. Giáo dục thể chất 11 – Cầu lông
44. Giáo dục thể chất 11 – Bóng rổ
45. Giáo dục quốc phòng và an ninh 11
46. Tiếng Anh 11 – Global Success – Sách học sinh

Các đơn vị đầu mối phát hành

- **Miền Bắc:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Bắc
- **Miền Trung:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung
- **Miền Nam:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục Cửu Long

Sách điện tử: http://hanhtrangso.nxbgd.vn

Kích hoạt để mở học liệu điện tử: Cào lớp nhũ trên tem để nhận mã số. Truy cập http://hanhtrangso.nxbgd.vn và nhập mã số tại biểu tượng chìa khoá.

Giá: ... đ